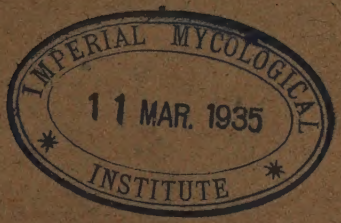
1934 № 8

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК



BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

МОСКВА — ЛЕНИНГРАД
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ · EXEMPLE DE CITATION

Н. А. Артемьев. Теория вертикального упругого маятника.
ИМЕН, 1934, № 8, стр. 1225.

N. Artemjev. La théorie du pendule élastique vertical.
BAS-MN, 1934, № 8, p. 1225 (en russe).

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Январь 1935 г.

Непременный секретарь академик *В. Волгин*

Редакционная коллегия: академик А. А. Борисяк
академик С. И. Вавилов
академик А. А. Рихтер
академик Д. С. Рождественский

Ответственный редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Технический редактор Л. А. Федоров
Ученый корректор С. С. Черняевский

Сдано в набор 21 октября 1934 г. — Подписано к печати 14 января 1935 г.

180 (1119—1298) стр. (31 фиг.)
Формат бум. 72 × 110 см. — $11\frac{2}{8}$ печ. л. — 42 000 тип. зн. в печ. л. — Тираж 3000
Ленгорлит № 35440. — АНИ № 558. — Заказ № 697

Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ИНТЕРФЕРОМЕТРЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ АНОМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИИ

Д. С. РОЖДЕСТВЕНСКОГО

1. При первых же работах по аномальной дисперсии[1] выяснилось, что интерферометр Жамена обычного типа не является достаточно удобным для многих целей, хотя основные черты его конструкции заставляют предпочесть его интерферометру Майкельсона. Действительно, тот факт, что каждое из зеркал интерферометра Жамена представляет сплошную плоскопараллельную пластинку из стекла, ограничивает его применение в смысле недостаточного разделения параллельных интерферирующих пучков. Расстояние между ними при падении света на пластинку, как обычно, под углом 45° равно приблизительно $^3/_4$ толщины пластинки. Если по условиям опыта нужно осуществить разделение пучков в 4 см, то зеркала должны быть толщиною в 5 см. Подобные блоки стекла $5 \times 4 \times 10$ см^3 были однажды осуществлены, но их изготовление было затруднительно и, к тому же, они оказались очень неудобными для работы. Оптик, полирующий плоскопараллельные пластинки в 5 см толщины практически уже не может пользоваться для проверки плоскопараллельности интерференционным методом, так как разность хода между лучами, отраженными передней и задней поверхностями равна 15 см и следовательно слишком велика, чтобы можно было с удобством наблюдать интерференционные кольца. Поэтому приходится ограничиться в качестве критерия параллельности поверхностей аутоколлимацией, что дает уже гораздо худшие результаты. Далее, при такой толщине затруднительно бывает получить стекло достаточной однородности. Но самым важным недостатком, как указано в цитированной статье, является медленное прогревание толстого стекла при освещении его интенсивным пучком света.

Опыты почти всегда ведутся при возможно интенсивном освещении для сокращения выдержки. Лучи от вольтовой дуги, собранные линзой на стекло, всегда заметно прогревают его, даже если они пропущены через воду. Предельное нагревание при большой теплоемкости и плохой теплопроводности толстой пластинки получается только через несколько часов, и практика показывает, что

[1] Д. Рождественский. Аномальная дисперсия в парах натрия. СПб 1912, стр. 29.

интерференционные полосы часами медленно ползут в поле зрения. С другой стороны, интерферометр Майкельсона, в котором всех этих удобств не имеется, в свою очередь представляет те неудобства, что пучки света в нем непараллельны, и зеркала удалены друг от друга. Поэтому весь интерферометр целиком сильно подвержен термическим воздействиям, и устойчивости полос можно добиться лишь при заключении его в термостат.

Поэтому был выработан новый тип интерферометра, который соединяет достоинства интерферометров Жамена и Майкельсона. Именно, в сущности это прежний интерферометр Жамена, в каждом зеркале которого передняя поверхность отделена от задней. Иначе говоря, каждая пластинка заменена парой пластинок (см. фиг. 1). Из них одна посеребрена полупрозрачным слоем (тонкий штрих, фиг. 1 a, a'), а другая сплошным (толстый штрих, b, b'). Каждая из пар закреплена на одной стойке, имеющей все регулировочные движения, которыми обычно снабжают каждое зеркало интерферометра Жамена. Полупрозрачное зеркало может быть сколько угодно далеко отодвинуто от сплошного зеркала, и таким образом пучки могут быть произвольно раздвинуты. Далее, свет проходит только через тонкое стекло a, и поэтому нагревание его не вносит никаких затруднений. Таким образом устраняются все указанные недостатки.

С интерферометрами этого типа были проделаны все работы по аномальной дисперсии в Гос. Оптическом институте (ГОИ). В некоторых случаях применение описанного типа не только представляет значительные удобства, но просто оказывается неизбежным, именно в том случае, когда материала для толстых зеркал найти невозможно. Такой случай встретился на практике в работах, предпринятых в ультрафиолетовой области. Здесь флюорит является гораздо более выгодным, чем кварц, во-первых вследствие своей изотропности, а во-вторых вследствие большей прозрачности в далеких ультрафиолетовых лучах. Между тем флюорит в толстых пластинах достать невозможно. Поэтому ультрафиолетовая область стала доступной для работ только после того, как были применены интерферометры нового типа. На них сделаны все работы в ГОИ с анализом аномальной дисперсии в многочисленных сериях, кончающихся в далекой ультрафиолетовой области. На них же были выполнены и работы школы Ладенбурга,[1] которому были посланы чертежи интерферометров ГОИ.

Однако, при изготовлении подобных интерферометров встают новые трудности, которые отсутствуют для обычного интерферометра Жамена. В последнем оба зеркала должны состоять из плоскопараллельных пластинок строго одинаковой толщины, что достигается изготовлением одной большой, всюду плоской и параллельной пластинки, которую затем режут на две части. Правда, в лабораторных жаменовских интерферометрах, особенно старинного происхождения,

[1] R. Ladenburg und G. Wolfson. ZS. f. Phys., 79, 48, 1932.

зачастую зеркала не вполне плоски, не безупречно параллельны и тем самым оказываются не вполне одинаковыми по толщине, так что с ними работать с большим удобством нельзя. Но несомненно изготовление пластинок плоских и параллельных до $^1/_{20}$ длины волны не представляет трудности для опытного оптика, и тем самым оптик-мастер снимает с оптика-экспериментатора всю заботу об очень деликатных регулировках, которые в нашем типе падают на последнего целиком. Стойка для пары пластинок a и b, кроме обычных установочных винтов должна иметь, во-первых, приспособление для строгой параллелизации поверхностей a и b, и во-вторых, приспособление для установки расстояния между a и b, равным расстоянию между a' и b'.

Первый интерферометр этого типа описан в выше цитированной работе. Он имел три винта у сплошного зеркала для параллелизма, тогда как полупрозрачное зеркало a передвигалось вдоль салазок по направлению ab. Критерий параллельности a и b получался аутоколлимацией. Критерий равенства ab и $a'b'$ давался расположением полос после прохождения света через обе пары интерферометра. Последняя установка осуществляется очень медленно, путем очень сложным. Она нигде до сих пор описана не была и хранится лишь в словесных традициях ГОИ. А между тем ее приходится повторять довольно часто, так как параллелизм, достигнутый подвинчиванием трех винтов, расстраивается через немного недель вследствие температурных влияний и упругих последействий, хотя в течение этих недель интерферометр работает безукоризненно.

Поэтому в Гос. Оптическом институте был конструирован новый интерферометр того же типа с раздвинутыми парами пластинок, но с твердым расстоянием ab. Один из интерферометров этого типа описан А. Н. Филипповым.[1] В нем плоскопараллельные пластинки a и b прижимаются легкими пружинами каждая к трем малым выступам со сферически закругленными концами. Параллелизм достигается подполировыванием выступов при контроле аутоколлимацией (или обычным методом интерференционных полос). Равенство $ab = a'b'$ также достигается подполировыванием всех трех выступов одной из пластинок какой-нибудь стойки одновременно, причем критерием служит, как и выше, вид всей интерференционной картины.

Таким образом, винты, регулирующие параллелизм и равенство толщин, совсем устранены, и подвинчивание винтов заменено подполировыванием выступов. Несомненно, что подполировывание идет гораздо медленнее, но зато раз сделанная регулировка сохраняется навсегда, если только каркас стойки, который несет шесть выступов пластинок a и b, сделан достаточно крепким и неизменяемым. Механик, изготовляя каркас стойки уже устанавливает параллель-

[1] А. Н. Филиппов. Вероятности переходов членов главной серии лития. Тр. Гос. Оптич. инст., **8**, вып. 85, 1932, стр. 101. A. Filippov. Anomale Dispersion des Lithiumdampfes. ZS. f. Phys., **69**, 1931, 526.

ность плоскостей, проходящих через три точки выступов и равенство расстояний с точностью до $^1/_{100}$ мм. На долю экспериментатора ложится задача уточнить конструкцию до нужных пределов.

В первом интерферометре этого типа были приняты чрезвычайные меры для достижения неизменности. Так как последняя должна быть интерферометрической, т. е. скрепы отдельных частей стоек не должны длительно деформироваться на доли микрона, то свинчивание частей было совсем устранено, и каждая стойка, включая и малые выступы, была выфрезирована из цельного куска никкелевой стали. Окончательную подгонку сделал А. Н. Филиппов (см. выше), и результат получился ожидаемый. Именно, интерферометр оказался столь же неизменяемым во времени, как и обычный интерферометр Жамена. При этом флуоритовые пластинки, которые попарно определяли в каждой стойке одно зеркало Жамена, можно было вынимать и вновь вкладывать на место, не изменяя регулировки.

Далее, построены были и другие интерферометры из свинченных частей, более удобные для изготовления. Описанный тип интерферометра, созданный для цикла работ по аномальной дисперсии, повидимому, утвердился и в ГОИ и заграницей. Поэтому представляется интересным установить точные и ясные критерии для регулировки интерферометра, что и является главной целью настоящей статьи.

Эти критерии должна дать теория интерферометра Жамена с зеркалами равной и неравной толщины. В виду того, что часто лабораторные интерферометры, вследствие несовершенства их плоскопараллельных зеркал, давали картину интерференционных полос зеркал неравной толщины, теория интерферометра Жамена несколько раз трактовалась и для этого случая. Однако, все исследования[1] весьма простой теории непригодны для нашей цели, так как нигде не описаны те простые интерференционные явления, которые наблюдаются при зеркалах неравной толщины.

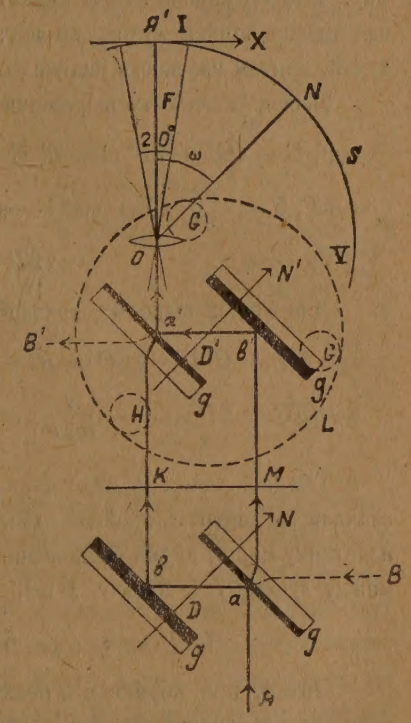
Исследователи в большинстве случаев занимались общими случаями, а частные случаи, которые как раз для нас важны, нигде не приведены с достаточной полнотой. Вообще теория интерферометра Жамена нигде в курсах и учебниках не дается, несмотря на ее простоту, так как выводы обычно слишком усложнены. Обычно даже физики, которым приходится работать с интерферометром Жамена, не знают, почему он дает всегда неожиданным образом

[1] Mascart. Ann. de ch. et de ph. (4), **23**. 1871, 116—156. — O. Lummer. Wied. Ann., **23**, 49, 1884; **24**, 1885, 417—430. — Ed. Ketteler. Beobachtungen über die Farbenzerstreuung der Gase. Bonn, 1865. — Д. К. Бобылев. ЖРФХО, **6**, 1874, 75—82, 105.—L. Zehnder. Wied. Ann., **34**, 1888, 91—121.— E. Blasius. Wied. Ann., **45**, 1892, 316—352. — L. N. Siertsema. De Jamin'sche interferentiaalrefractor. Groningen, 1890.—P. Joubin. Journ. de ph., **5**, 1886, 16—26. — Кириллов. Интерференционный рефрактометр Жамена и его применение к изучению аномальной дисперсии. Одесса, 1913. Здесь имеется сводка вышеприведенных статей.

горизонтальные полосы при освещении белым светом. Поэтому в данной статье будет ближе разобрана простая геометрия интерференционных явлений, нужных для овладения прибором.

Как главная цель будет поставлено измерение неравенства толщин двух зеркал интерферометра и в особенности устранение этого неравенства. Далее, будет выяснено, в какой мере и нужно ли вообще добиваться полного равенства и, наконец, как можно воспользоваться неравенством зеркал, чтобы получить интерферометр с вертикальными полосами в белом свете.

2. Зеркала равной толщины. Схема интерферометра Жамена нашего типа дана на фиг. 1. Первому зеркалу из пары пластинок a и b соответствуют нештрихованные буквы, второму — штрихованные. Мы все время далее будем предполагать, что в каждой паре обе пластинки a и b установлены строго параллельно, и толщины g пластинок a и a' всегда равны. Рассмотрим сначала вид интерференционных полос, когда расстояния пластинок в обеих парах равны.



Фиг. 1.

Возможны следующие методы наблюдения. Свет падает по направлению A, полосы видны по направлениям A' или B'. Или, свет падает по направлению B, и полосы видны опять в B' или A'. При этом пластинки a и a' в обоих зеркалах одновременно повернуты серебряным слоем либо внутрь либо наружу. Из возможного разнообразия методов остается только два в виду того соображения, что свет гораздо сильнее отражается от полупосеребренной поверхности со стороны границы воздух — серебро, чем со стороны границы стекло — серебро; очень тонкое серебрение даже ослабляет отражение от границы стекло — серебро по сравнению с непосредственным отражением от границы стекло — воздух. Поэтому возможны лишь методы $A \rightarrow A'$, серебряный слой пластинок внутрь (фиг. 1 и 2) или $B \rightarrow B'$, серебряный слой наружу (фиг. 3). При других методах полосы расплывчаты, так как налагаются сравнительно интенсивные отражения от противоположных плоскостей пластинок a. Дальнейший вывод будет развиваться сначала одновременно для случаев $A \rightarrow A'$ и $B \rightarrow B'$, но затем для определенности будем держаться метода наблюдения $A \rightarrow A'$.

Разность хода вычисляется одинаково при падении лучей по направлению A или B. Для лучей EK и CM (фиг. 2 и 3) она равна

$$\delta = (2D \pm g)\cos i \mp ng\cos r \qquad (1)$$

где верхний знак относится к фиг. 2, а нижний к фиг. 3. При этом i угол падения луча на пластинку, r угол преломления, n — показатель преломления. На фиг. 1 центральный луч A является представителем целого пучка сходящихся или расходящихся лучей, на фиг. 2 и 3 A (и B) означает один из наклонных лучей, причем плоскость падения совмещена с плоскостью чертежа.

Вывод указанного выражения для фиг. 3 следующий:

$$\delta = F_1E - CM + nF_1C = F_1E - F_1C\cos(\pi - i - r) - F_1E\cos(\pi - 2i) +$$
$$+ nF_1C = \frac{D}{\cos i}(1 + \cos^2 i - \sin^2 i) + \frac{g}{\cos r}(\cos i\cos r - \sin i\sin r + n) =$$
$$= (2D + g)\cos i + ng\cos r$$

Для фиг. 2 вывод несколько иной:

$$\delta = FE - CM - nFC = FI - FH + FH - CM - nFC = HI + FL -$$
$$- nFC = 2D\cos i + \frac{g}{\cos r}\Big[\cos(i - r) - n\Big] = (2D + g)\cos i - ng\cos r.$$

Так как толщина пластинки g вообще мала по сравнению с D, то проще сначала рассмотреть крайний идеальный случай $g = 0$, иначе говоря, воздушную пластинку между двумя бесконечно тонкими слоями серебра. Тогда разность хода между лучами K и M фиг. 1 выразится проще:

$$\delta = 2D\cos i \qquad (2)$$

Потом, при переходе к реальным зеркалам, нужно будет сделать только небольшое и несущественное исправление.

В конце для полноты будет сказано несколько слов об обычном типе интерферометра Жамена со стеклянными пластинками. Для него разность хода выражается всем известной формулой:

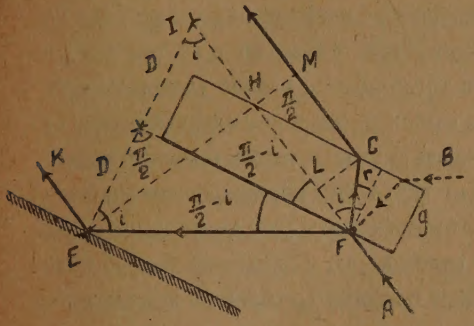
$$\delta = 2Dn\cos r. \qquad (3)$$

Если показатель преломления $n = 1$, то $r = i$, и мы возвратимся к формуле (2).

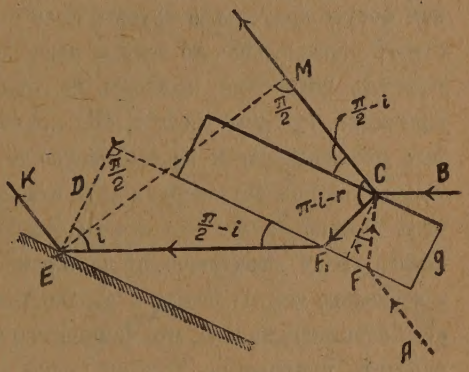
Потери фаз при отражениях лучей в формулах 1—3, не учтены, так как они взаимно компенсируются для интерферирующих лучей после прохождения через второе зеркало.

Лучи K и M, падая на второе зеркало из пары пластинок b' и a' соединяются в один луч A', если угол падения такой же, как и на первое зеркало ($i' = i$) и плоскости падения совпадают. Ясно, что при этом они получают

такую же, но отрицательную разность хода и, следовательно, в A' (фиг. 1) оба луча будут в сумме иметь разность хода, равную нулю. Но если $i' \neq i$, или плоскости падения не совпадают, то лучи не сойдутся в одной точке a', и после зеркала a' мы будем иметь два раздвинутых параллельных луча. Тем не менее разность хода, вносимая вторым зеркалом, в лучи K и M будет попрежнему определяться формулой (1) со штрихованными буквами, так как боковое смещение луча не оказывает влияния на величину разности хода. Что это так, легко убедиться,



Фиг. 2.



Фиг. 3.

если например, в фиг. 2 взять какой-нибудь параллельный A когерентный луч, провести через F плоскость, перпендикулярную к A, и от нее начать отсчитывать фазы. После двукратного отражения мы получим у K два луча, фазы которых будут одинаковы на плоскости, к ним перпендикулярной, и, следовательно, оба они будут иметь одинаковую на той же плоскости разность фаз с лучем M. На фиг. 1 также можно взять любой когерентный параллельный K луч, и он в перпендикулярной плоскости KM будет иметь одинаковую разность фаз с M. Если подобрать этот луч так, что он сольется с M в точке a' после двух отражений, то и будет ясно утверждение о правильности штрихованной формулы (1) для любых двух лучей K и M.

В данном параграфе принято, что $D' = D$, и, следовательно, будут отличаться друг от друга только i и i' (r и r'). Вся разность хода Δ, внесенная интерферометром, равна для воздушных пластинок

$$\Delta = \delta' - \delta = 2D(\cos i' - \cos i) \qquad (4)$$

Когда нормали N и N' каждого зеркала составляют некоторый угол ε, то вообще $i' \neq i$, и анализ уравнения (4) должен дать вид кривых равной разности хода, когда $\Delta = \text{const}$.

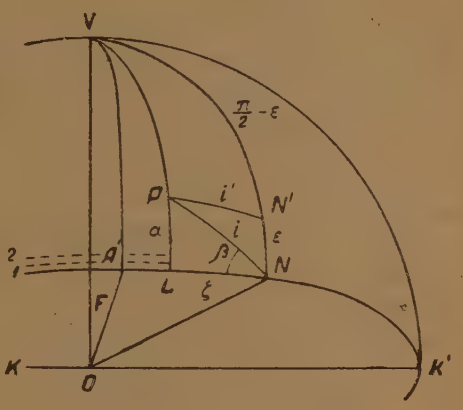
Луч $A \rightarrow A'$, как центральный, схематически представляет целый комплекс лучей, падающих под разными углами на пластинку a в разных ее точках. Из этого комплекса выделим прежде всего все параллельные лучи, падающие под

одним углом на разные точки a. Каждый из этих лучей разделяется на два с одинаковой разностью хода (4), и по выходе из интерферометра все они соединяются в одну точку на экране, помещенном в главной фокальной плоскости линзы O. Таким образом различным точкам экрана соответствует, каждой, своя разность хода. Интерферометр Жамена, когда его зеркала состоят из пары строго параллельных поверхностей, дает типичные полосы равного наклона, локализованные в бесконечности, которые нужно рассматривать или в плоскости главного фокуса проектирующей линзы, или, прибавив к линзе лупу, в главном фокусе зрительной трубы. Если в одном зеркале, или в обоих, пластинки не строго параллельны, то полосы равного наклона не могут существовать, так как разность хода будет зависеть не только от углов i и i', но и от тех мест на пластинке, где лучи упадут. Мы получаем тогда полосы равной толщины, которые локализованы не на бесконечности, а самым прихотливым образом, в зависимости от поворота зеркал друг относительно друга, и также в зависимости от угла падения i; так что иногда различные части интерференционной картины нельзя сразу сфокусировать на экране. Это происходит уже заметно при углах в несколько секунд между поверхностями одной пары. И большей частью качество пластинок таково, что чаще всего именно с такими ошибками и недостатками работать приходится. Тем не менее, можно получать даже очень хорошие результаты с плохими поверхностями, иногда даже с зеркальными стеклами. Однако, несравненно быстрее и удобнее работать с пластинками хорошего качества, плоскими и параллельными до 0.1 полосы; полного же параллелизма до долей секунды следует требовать и от двух пар пластинок каждого зеркала. Далее, будет всюду предполагаться, что параллелизм поверхностей вполне совершенный.

Так как разность хода зависит только от наклона лучей, то проще сначала познакомиться с видом кривых разностей хода на сфере S (фиг. 1) с центром в центре линзы O и с радиусом F, равным например фокусу проектирующей линзы. На фиг. 1 видно сечение этой сферы с горизонтальной плоскостью. При этом предполагается, что пластинки первого зеркала всегда вертикальны, и потому направление нормали N к ним, проведенное через центр сферы O, лежит в плоскости чертежа и пересекает сферу S в неизменной точке N. Направление нормали N' пластинок второго зеркала переменное, так как зеркала можно несколько поворачивать регулировочными винтами, о которых речь будет дальше. Центральный луч A падает на пластинку a в плоскости чертежа приблизительно под углом в 45°. Центральным будем называть тот луч, который после интерферометра проходит по оси линзы O, так что угол $A'ON = \omega$ нужно в обычных на практике случаях считать близким к 45°, хотя дальнейшее рассмотрение ведется для произвольного утла ω. Поле зрения линзы O ограничивается оправами пластинок обоих зеркал и их относительным расстоянием. Для определенности

будем считать, что оно равно 20°, хотя по крайним лучам на фиг. 1 видно, что чертеж — а обычно и действительность — не допускают столь большого отверстия.

Внутри поля зрения кривая на сфере мало отличается от ее проекции на экране. Но нам важно, чтобы наблюдатель, устанавливающий интерферометр, ясно представлял себе кривые равной разности хода не только в ограниченном поле зрения, но и в их полном виде. Поэтому, будут рассмотрены эти кривые даже в таких местах сферы S, где проекция на экран исказила бы их до неузнаваемости. При этом будем считать, что наблюдатель рассматривает экран или внутреннюю поверхность сферы где-то из точки A.



Фиг. 4.

Пусть сначала нормаль N' повернута на небольшой угол ε так, что плоскость NON' вертикальна, и на фиг. 4 она пересекает поверхность сферы по большому вертикальному кругу $NN'V$, через точку V, расположенную вертикально над O. Плоскость KLK' горизонтальна и перпендикулярна к NN'. Любое направление падающих лучей изображается точкой P на сфере, причем дуги больших кругов PN и PN' представляют углы падения i и i'. Возьмем N за полюс и определим положение P на сфере углом падения i и плоским углом β. Тогда из сферического треугольника NPN' угол i' можно выразить через i, β, ε и ур. (4) перепишется так:

$$\Delta = p\lambda = 2D(\cos\varepsilon\cos i + \sin\varepsilon\sin i\sin\beta - \cos i)$$

где λ длина волны падающего монохроматического пучка, p порядок полосы, целое число для максимума интерференционной полосы. Угол ε всегда очень мал. Дальше будет видно, что он порядка 5′ и меньше, и никогда не превышает 30′. Поэтому во всем дальнейшем изложении будет принято приближение $\cos\varepsilon \cong 1$ и $\sin\varepsilon \cong \varepsilon$, так что

$$\frac{p\lambda}{2D\varepsilon} = \sin i\sin\beta. \qquad (5)$$

Это уравнение очень наглядно можно представить на сфере S (фиг. 4), если принять KLK' за круг экватора, V за северный полюс, круг $VN'N$ за первый меридиан, VPL за меридиан точки P, так что α есть широта, ζ долгота

точки P, отнесенные теперь уже к полюсу V (а не к полюсу N, как было только что и будет далее). Тогда мы имеем

$$\sin i \sin \beta = \sin \alpha.$$

и

$$\frac{p\lambda}{2D\varepsilon} = \sin \alpha.$$

Кривые равной разности хода представляют параллели на сфере[1], из которых на фиг. 4 нанесены пунктиром соответствующие $p = 1$ и 2. Эти параллели не эквидистантны, и расстояние между ними растет с широтой. Но главным образом, расстояние между ними, иначе говоря, ширина полос, зависит от угла ε между нормалями к пластинкам. Изменяя ε, мы можем сделать полосы очень широкими или очень узкими.

Прежде всего посмотрим, как будут перемещаться полосы, когда ε остается постоянным — пусть механизм (установочных) винтов второй стойки интерферометра позволяет это сделать, — а N' вращается около N по малому кругу. При этом вслед за дугой NN' будет вращаться экватор KLK' с параллелями и с полюсом. Это вращение можно изобразить гораздо нагляднее, если вернуться назад к неизменному полюсу N, к координатам i, β и к уравнению 5. Задавая углы β, вычисляем соответствующие величины i, для разных p и точки с этими полярными координатами наносим в плоскости, перпендикулярной к ON, и касательной к сфере S в точке N (фиг. 5). А затем, вращая фиг. 5 около точки N, смотрим, как проходят полосы через поле зрения I около точки A'.

При этом для примера возьмем D равным 30 мм, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$, $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ мм, так что ур. 5 превратится в

$$\frac{p}{60} = \sin i \sin \beta.$$

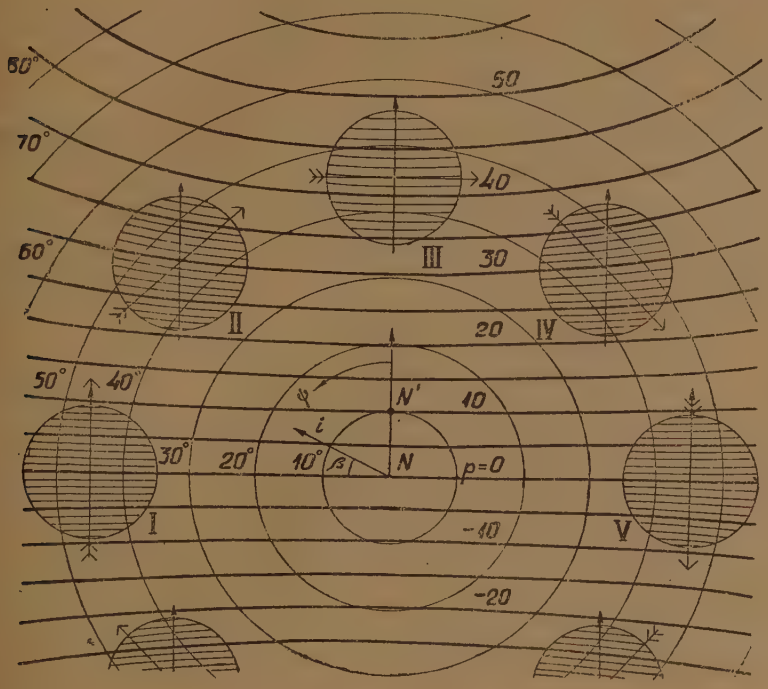
Максимальное значение p может быть 60; в пределах фиг. 5 найдут место кривые равной разности хода для значений p через 5 единиц до $p = 55$. Они не только не эквидистантны, но и не параллельны в этой проекции, так что в них уже трудно узнать параллели экваториальной плоскости KLK'. Тем не менее искажение углов в этой проекции меньше, чем если бы все параллели были действительно представлены параллельными линиями на плоскости. В этой проекции можно без грубых ошибок иллюстрировать вращение интерференционных полос, что облегчит возможность следить за геометрической стороной явления при регулировке интерферометра. Для расчетов далее будут выведены точные уравнения.

Поле зрения I на фиг. 5 определено упрощенным образом: предполагается, что $\omega = 45°$ и тогда в горизонтальном направлении видна область от $i = 35°$ до $i = 55°$; на этом отрезке горизонтального радиуса-вектора как на диаметре

[1] Д. Бобылев, loc. cit.

начерчен круг. Нормаль N' на чертеже отклонена вверх по вертикали NV; угол $N'N$ показан преувеличенным в 350 раз.

Полосы в поле зрения горизонтальны, и нулевая полоса пересекает середину поля зрения, а потому интерференционные полосы видны в белом свете.



Фиг. 5.

Если плоскость NN' не вертикальна, то полосы не горизонтальны. Сохраняя тот же угол ε между N и N', мы будем вращать плоскость NN', увеличивая угол ψ между нею и вертикальной плоскостью NV, как показывает стрелка фиг. 5. Это все равно, что вращать всю фиг. 5 около точки N, сохраняя неизменным поле зрения I; или же, наоборот, можно нагляднее видеть результаты вращения NN', если оставить весь чертеж неподвижным, а вращать около точки N круг поля зрения, переводя его последовательно в II, III. Перевод поля зрения в — II, — III эквивалентен вращению NN' против стрелки ψ. При этом оперенная стрелка, пересекающая поле зрения, всегда означает вертикальное направление в поле зрения, а неоперенная стрелка параллельна направлению NN'.

При вращении NN', например, по стрелке, полосы перемещаются вниз, сверху появляются новые полосы высших положительных порядков, все более и более наклонные и несколько более широкие. В сравнительно узком поле зрения полосы

всегда кажутся прямолинейными и параллельными. Вращение полос в поле зрения идет сначала медленнее, чем вращение NN', но затем догоняет его, и когда NN' поворачивается на 90° и становится горизонтальным, то полосы тоже поворачиваются на 90°, становятся вертикальными и наиболее широкими. При вращении в обратном направлении все идет в обратном порядке, и снизу появляются полосы высших отрицательных порядков. Расширение полос не велико. Вертикальные полосы шире горизонтальных в $\sqrt{2}$ раз при том же угле ε между нормалями.

При изменении ε ширина полос изменяется обратно пропорционально. Если полосы горизонтальны в поле зрения, то изменяем ширину полос, оставляя нулевую полосу неподвижной; если же они наклонны, то изменение ε влечет за собой вместе с изменением ширины движение полос через поле зрения. Но угол наклона их к горизонту не меняется. Последний зависит только от наклона ϕ плоскости нормалей.

Так движутся полосы при наблюдении в однородном свете. Но в белом свете могут быть видны только горизонтальные полосы, которые уходят вверх или вниз при вращении, после чего явление интерференции исчезает. Это есть следствие того, что в белом свете могут быть видны только полосы самых первых порядков. Без всяких вычислений ясно, что нулевая полоса должна лежать в плоскости, делящей пополам угол между нормалями к зеркалам. Так как последние обычно стоят приблизительно вертикально, то нормали к ним приблизительно горизонтальны. Равноделящая угол плоскость вращается таким образом около горизонтальной оси (ON на фиг. 1), и она, вместе с нулевой линией, должна быть горизонтальна, если должна пересечь поле зрения, которое в горизонтальной же плоскости повернуто на 45° ($= \omega$) от нормали.

Ничтожность величины ε разрешает нам приближенное ур. 5 и приближенное выражение: от «плоскости, равноделящей угол NN'» практически нельзя отличить «плоскость, проходящую через N и нормальную к NN'».

В сущности в белом свете могут быть видны и вертикальные полосы, но только столь широкие, что их трудно принять за полосы. Действительно, уменьшим ε в 10 раз, что равносильно уменьшению p в 10 раз в ур. 5 и в колонке величин порядка полосы на фиг. 5. Мы видим, что в поле зрения I будут видны только две черные полосы $\pm 1/2$. Если же повернуть NN' на 90°, то в III поле можно видеть в $\sqrt{2}$ раз более широкие полосы, но все же помещаются темные полосы $3\,1/2$ и $4\,1/2$. Как увидим далее, ширина их будет, при фокусе линзы $F = 30$ см, равна 7 см в I-м и 10 см в III-м полях.

3. Разность хода в одном луче. На фиг. 4 точка P ближе к N', чем к N, а потому $\Delta > 0$ в ур. 4, и переднее зеркало вносит бо́льшую разность хода в луч M, чем заднее в луч K. Скомпенсируем отчасти этот избыток разности хода, поместив нормально в луч K стеклянную пластинку, например, толщиной в 60 λ,

что при показателе преломления $n = 1.5$ внесет разность хода $(n-1)\,60\,\lambda = 30\,\lambda$.

Тогда ур. 5 перепишется так:

$$\frac{(p+30)\lambda}{2D\varepsilon} = \sin i \cos\beta$$

Иначе говоря, из всех чисел колонки p на фиг. 5 нужно вычесть число 30. Таким образом, при вертикальном положении NN', как на фиг. 5, горизонтальные полосы порядка — 30 не будут видны в белом свете; при повороте ψ на 45° по стрелке через поле зрения (II) пройдут как раз нулевые и, следовательно, видимые в белом свете наклонные полосы. При дальнейшем повороте до 90° полосы, порядка + 12 (III) станут вертикальными. Они не видны в белом свете, но при дальнейшем вращении до 135° снова появятся (IV), видимые нулевые полосы наклонные в противоположную сторону по сравнению с II. Легко вызвать также и вертикальные (III) видимые в белом свете нулевые полосы, если в поле зрения III несколько уменьшить ε и тем понизить порядок полос до нуля.

Таким образом, можно, действуя на два параметра ψ и ε, вызвать в поле зрения нулевые полосы как наклонные, так и вертикальные, но — обратно тому как было без разности хода, — никак нельзя вызвать полосы горизонтальные. Даже нельзя уменьшать наклон видимых нулевых полос ниже некоторого определенного предела. Если ввести еще большую разность хода в луч K, то нужно увеличить угол ε, чтобы скомпенсировать ее, и нулевые видимые в белом свете полосы станут еще уже, а минимальный возможный наклон увеличится. При очень большой разности хода в белом свете можно видеть только очень узкие почти вертикальные полосы.

Уже из описания этого явления видно, что наклон и ширина нулевых полос могут послужить для измерения величины введенной разности хода. С другой стороны, поворот белых полос от одного наклона через вертикальное положение к наклону противоположному, вполне аналогичен тому, что наблюдается в интерферометре с зеркалами неравной толщины. Бо́льшая толщина одного из зеркал эквивалентна прибавке слоя воздуха (или слоя стекла в обычном интерферометре Жамена), правда, помещенного под углом 45° к лучу. Поэтому мы достигнем конечной цели, определения разности толщин двух зеркал Жамена, научившись сначала определять из наклона (и ширины) полос разность хода, введенную в интерферометр с зеркалами равной толщины.

Для этого нужно получить уравнение полос на экране. Но прежде чем приступить к их выводу, отметим две неточности, допущенные в только что сделанных рассуждениях. Во-первых было принято, что стеклянная пластинка, помещенная нормально к центральному лучу, вводит одинаковую разность хода во все лучи, падающие на нее под различными углами. Мы увидим далее, что это при-

ближение допустимо для лучей, падающих на пластинку в пределах поля зрения, непревышающем 10°. Что же касается лучей вне поля зрения, то для них приближение недопустимо, и потому при введении разности хода мы должны отказаться от рассмотрения полной интерференционной картины, хотя по прежнему можем иллюстрировать вращение полос в поле зрения вращением фиг. 5.

Во-вторых, мы говорили о перемещении нулевой полосы. На самом деле мы должны были бы говорить о полосе ахроматической. Введенная разность хода $(n-1)\,60\,\lambda$ компенсируется наклоном лучей в переднем зеркале, т. е. разностью хода в воздухе. Суммарная разность хода равна нулю для одних лучей, но так как $n-1$ отличается для крайних лучей спектра на 2—3%, то настолько же отличается для них и разность хода. Не будем напоминать о том, что называется ахроматической полосой: достаточно того, что центр картины окрашенных полос в белом свете сразу бросается в глаза и что он близок к нулевой полосе. В этом смысле мы будем понимать часто употребляемое дальше выражение — «нулевая полоса». Центр окрашенной картины в белом свете, — это единственная отметка неотличимых друг от друга в монохроматическом свете интерференционных полос.

4. Уравнения интерференционных полос для зеркал равной толщины. Чтобы получить эти уравнения, нужно от полюса N перейти к полюсу A' — пересечению центрального луча со сферой S (см. фиг. 1, 4 и 6), а затем проектировать кривые на экран, касательный к сфере в этой точке A'.

На фиг. 6 $A'N$ есть горизонтальная дуга ω сферы, близкая к 45°; $A'V$ и NV две перпендикулярных к $A'N$ плоскости больших кругов; плоскость нормалей NN' составляет угол ψ с плоскостью NV вертикального круга. Точка P в поле зрения I (как на фиг. 5) составляет (как на фиг. 4) угол i с нормалью N, а дуга PN составляет угол β с дугой, перпендикулярной к NN'. Обозначая угол PNA' через χ, имеем $\beta = \psi + \chi$. Новыми координатами являются дуга ϑ и угол φ. В ур. 5

$$\sin i \sin\beta = \sin i \sin\psi \cos\chi + \sin i \cos\psi \sin\chi.$$

Но

$$\sin i \sin\chi = \sin\varphi \sin\vartheta \quad \text{и} \quad \sin i \cos\chi = \cos\vartheta \sin\omega - \sin\vartheta \cos\varphi \cos\omega,$$

откуда

$$\sin i \sin\beta = \sin\varphi (\cos\vartheta \sin\omega - \sin\vartheta \cos\varphi \cos\omega) + \cos\psi \sin\vartheta \sin\varphi.$$

Проектируем далее кривые на экран, причем в плоскости экрана направим ось $A'X$ горизонтально вправо, а ось $A'Y$ вертикально вверх.

Тогда

$$\frac{x}{F} = \xi = \operatorname{tg}\vartheta \cos\varphi \quad \text{и} \quad \frac{Y}{F} = \eta = \operatorname{tg}\vartheta \sin\varphi,$$

а следовательно

$$\cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}; \quad \sin\vartheta\cos\varphi = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}; \quad \sin\vartheta\sin\varphi = \frac{\eta}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}.$$

Подставляя в ур. 5, получим

$$\frac{p\lambda}{2D\varepsilon}\cdot\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}=\sin\psi\sin\omega-\xi\sin\psi\cos\omega+\eta\cos\psi \qquad (6)$$

В первом приближении можно пренебречь ξ^2 и η^2 по сравнению с 1, так как при поле зрения в 20°

$$\frac{\xi^2}{2}\quad\text{и}\quad\frac{\eta^2}{2}\leqslant\frac{0.175^2}{2}=0.015$$

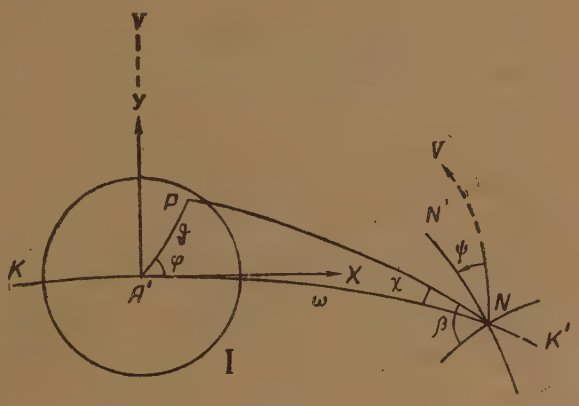
и тогда

$$\frac{p\lambda}{2D\varepsilon}=\sin\psi\sin\omega-\xi\sin\psi\cos\omega+\eta\cos\psi \qquad (7)$$

Это приближенное уравнение дает в поле зрения всегда прямолинейные параллельные, эквидистантные полосы, угол которых с осью абсцисс, определяется формулой

$$\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\psi\cos\omega \qquad (8)$$

Угол γ не зависит от ε и всегда меньше ψ по абсолютной величине, кроме случаев $\psi=0$ и $\psi=\frac{\pi}{2}$, когда $\gamma=\psi$. Эти свойства полос уже были отмечены выше. Нулевая полоса $p=0$ при всяком ψ проходит через точку $\eta=0$, $\xi=1$, или $x=F$, где нормаль ON (фиг. 1) пересекает плоскость экрана. При вращении плоскости нормалей NN' нулевая полоса вращается вокруг этой точки, — и видимые в белом свете полосы вместе с ней выходят из поля зрения.



Фиг. 6.

Если обозначим через b ширину полосы на экране, а через $\tau=\frac{b}{F}$ угловую ее ширину, то получим

$$\sigma=|\eta_{p+1}-\eta_p|\cos\gamma\quad\text{при}\quad\xi=0,$$

а из ур. 7:

$$\sigma=\frac{\lambda}{2D\varepsilon}\frac{\cos\gamma}{\cos\psi}=\frac{\lambda}{2D\varepsilon}\frac{\sin\gamma}{\sin\psi\cos\omega} \qquad (9)$$

Угловая ширина изменяется при заданном ε от $\frac{\lambda}{2D\varepsilon}$ при $\psi=0$ для горизонтальных полос до $\frac{\lambda}{2D\varepsilon}\cdot\frac{1}{\cos\omega}$ при $\psi=\frac{\pi}{2}$ для вертикальных, т. е. в $\sqrt{2}$ раза, как было указано выше, если $\omega=45°$. Ширина b дает практические границы для ε. Неудобно иметь дело с полосами тоньше полумиллиметра на экране.

При $D = 30$ мм и $F = 300$ мм ур. 9 даст верхнюю границу $\varepsilon \leqslant 17'$. В обычных интерферометрах с не слишком тонкими зеркалами величина угла ε вряд ли когда-нибудь превышает полградуса, но несомненно, построив интерферометр из покровных стекол, мы будем иметь дело с ε в десятки градусов. С другой стороны, трудно работать с полосами, ширина которых больше диаметра поля зрения. Тогда $\sigma = 0.35$, и должно быть $\varepsilon \geqslant \frac{5 \cdot 10^{-4}}{60 \cdot 0.35} = 5''$. Это уже величина очень малая, но мы увидим далее, что с помощью интерференционных полос можно следить за изменением ε в доли секунды.

Теперь вставим, как в § 3, стеклянную плоскопараллельную пластинку, толщины d', нормально к лучу K, чем введем разность хода $d'(n\cos r - \cos i)$ для лучей, падающих на пластинку под углом i. Эту формулу легко получить, обратившись к фиг. 2. Введенная разность хода равна $nFC - FL$ и вывод формулы 1 с нижним знаком показывает, что мы получим только что приведенное выражение, положив в I $D = 0$, $g = d'$ и изменив знак всего выражения. Так как в данном случае $i = \vartheta$, то введенная разность хода равна $d'\left(\sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta} - \cos\vartheta\right)$ Ее нужно вычесть из правой части ур. 5; это тоже самое, что вычесть из ур. (6) соответственно $\frac{d'}{2D\varepsilon}\left\{\sqrt{(n^2-1)(1+\xi^2+\eta^2)+1} - 1\right\}$, или с тем же приближением, как в (7) (ξ^2 и $\eta^2 \leqslant 1$) вычесть из правой части (7) величину $\frac{d'}{2D\varepsilon}(n-1)$. Обозначая $d'(n-1) = m\lambda$, получим окончательно вместо ур. (7)

$$(p+m)\frac{\lambda}{2D\varepsilon} = \sin\psi\sin\omega - \xi\sin\psi\cos\omega + \eta\cos\psi. \qquad (10)$$

Угол γ, который полосы составляют с осью абсцисс, и угловая ширина полос σ попрежнему определяются ур. (8) и (9).

Те явления, которые были качественно описаны в § 3, теперь можно проследить количественно.

Угол наклона нулевых полос, проходящих через начало координат, легко получить, если сначала положить в (10) $p = 0$ и $\xi = \eta = 0$. Тогда

$$\frac{m\lambda}{2D\varepsilon} = \sin\psi\sin\omega$$

Исключая из этого выражения и из ур. (8) и (9) величины ψ и ε, которые мы не можем измерить, так как не имеем соответствующих кругов с делениями на стойках интерферометра, получим

$$m\sigma = \sin\gamma\,\mathrm{tg}\,\omega \qquad (11)$$

Угол ω является некоторой постоянной прибора, которая должна быть раз на всегда измерена. Тем самым определяется положение оси ординат, но точное направление оси абсцисс, которое необходимо для измерения угла γ остается неиз-

вестным. Поэтому, изменяя дальше ψ, как указано в § 3, найдем нулевую полосу с обратным наклоном, и с той же шириной (неизменный угол ε), которая составит угол 2γ с прежней наклонной нулевой полосой. Прочерчивая, например, карандашом, на экране нулевые полосы в двух положениях с наклонами противоположных знаков и соседние с ними, измерим угол 2γ и угловую ширину σ, а из (11) найдем искомое m.

Еще лучше, если мы сделаем полосы вертикальными $\left(\psi=\frac{\pi}{2},\quad \gamma=\frac{\pi}{2}\right)$, так что при $\omega=45^\circ$

$$m=\frac{1}{\sigma}, \tag{12}$$

и, измерив угловую ширину σ, сразу узнаем порядок m. Так как $\sin\gamma$ при значениях, близких к единице, изменяется медленно, то вертикальность полос не должна быть особенно точной.

Оба эти метода отличаются малой точностью, так как они основаны на измерении ширины полосы, расплывчатого объекта без резких очертаний. Обычно, точность этого измерения оценивается в 10%, и лишь при большой тщательности и повторении измерений может быть доведена до 1%.

Кроме того второй метод неприменим для малых разностей хода, когда $m<3$, так как полосы становятся шире поля зрения (должно быть $\sigma\leqslant 0.35$).

Что касается первого метода, то он применим только в том случае, когда имеется механизм, гарантирующий неизменность угла ε и тем самым ширины полос при изменении ψ, чего вообще в интерферометре Жамена не бывает. Если параметры ε и ψ изменяются как-нибудь, то нужно убедиться в одинаковости ширины полос при прямом и противоположном по знаку, но равных по величине наклонах непосредственным двукратным измерением, которое еще увеличит ошибку вдвое. Только тогда есть гарантия, что измеряется действительно двойной угол γ.

Однако, нужно заметить, что особая точность нам и не нужна. В сущности наша конечная цель была формулирована неправильно. Она заключается не в измерении, а в уничтожении неравенства толщин зеркал. Следовательно важна не точность измерения, а чувствительность. При больших разностях толщин важно знать знак и порядок величины. По мере того, как разность уменьшается сполированием выступов, необходим достаточно чувствительный метод обнаружения остатка разности.

Поэтому, в дальнейшем обратимся, главным образом, к определению чувствительности и перейдем для этой цели от ε и ψ к реальным параметрам интерферометра. Вместе с тем при реальных параметрах узнаем и точные методы измерения разности хода.

5. Параметры μ и ν. Трудно и неудобно построить для наших интерферометров механизмы, которые отдельно и независимо управляли бы параметрами

ε и ψ. Вполне удовлетворительно действуют обыкновенные установочные винты (G, G, H, фиг. 1) и вращение, как на гониометре, вокруг вертикальной оси D' лимба L, на котором вертикально укреплены пластинки gg. Это обычное устройство схематически пунктиром намечено на передней стойке интерферометра (фиг. 1). Винт H вращает стойку около горизонтальной оси GG, которая, как мы примем для простоты, перпендикулярна к нормали N пластинок неподвижной стойки, а также к оси D'. Вращением около этих двух осей всегда можно привести N' в совпадение с N. Если затем повернуть N' на угол ν около D', и на угол μ (вместе с D') около gg, то при очень малых углах вращения, как это всегда будет, можно начертить прямоугольный треугольник (фиг. 7), где

$$NN' = \varepsilon, \quad \text{а} \quad \nu = \varepsilon \sin\psi; \quad \mu = \varepsilon \cos\psi.$$

Эти параметры ν и μ вводим в ур. (8), (9), (10) и получаем, решив (10) относительно η:

Фиг. 7.

$$\eta = \frac{1}{\mu}\left[-\nu(\sin\omega - \xi\cos\omega) + (p + m)\frac{\lambda}{2D}\right] \tag{13}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\nu}{\mu}\cos\omega \tag{14}$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2D}\frac{\cos\gamma}{\mu} = \frac{\lambda}{2D}\frac{\sin\gamma}{\nu\cos\omega} \tag{15}$$

Когда $\nu = 0$, полосы горизонтальны ($\gamma = 0$); когда $\mu = 0$, они вертикальны $\left(\gamma = \frac{\pi}{2}\right)$, кроме того случая, когда ν и μ равны нулю одновременно. Тогда полос вообще нет, они бесконечно широки; разность хода для всего поля зрения одинакова, так как направления нормалей N и N' совпадают.

Рассмотрим сначала случай, когда внесенная разность хода $m = 0$.

Обратим внимание на нулевую полосу $p = 0$ (ур. 13). Если $\nu = 0$, она горизонтальна и остается горизонтальной и неподвижной при изменении μ. При этом изменении вместе с тем происходит следующее. Пусть μ уменьшается от положительной величины через 0 к отрицательным величинам. Полосы выше нулевой ($p > 0$) идут наверх, ниже нулевой — вниз, они расширяются. Когда $\mu = 0$, они становятся бесконечно широкими. При дальнейшем уменьшении μ в отрицательные величины, полосы, положительного и отрицательного порядка, изменив свой знак, возвращаются назад к неподвижной полосе снизу и сверху. Критерий неподвижности какой-нибудь полосы во всех ее точках является для нас главным критерием, который дает возможность измерять во всех случаях как при введении разности хода, так и при неравенстве зеркал. Неподвижной может быть полоса во всех ее точках (при разных ξ), только если $\nu = 0$. Поэтому регулировать

интерферометр, значит сделать $\nu = 0$. Нужно определить, с какой точностью можно сделать $\nu = 0$, и тогда легко получится точность измерения разности хода или чувствительность к внесению очень малых разностей хода для интерферометра с равными зеркалами, а отсюда и способ определения разности толщин зеркал.

Посмотрим, как можно следить за изменением величины ν. Пусть задано некоторое $\mu > 0$; изменяя ν от нуля в положительную или отрицательную сторону, заставляем нулевую полосу вместе со всей системой полос при неизменной почти ширине двигаться вниз или вверх. При этом несколько меняется и их наклон (14). Но если μ настолько велико, что полосы не слишком широки, и их помещается несколько в поле зрения, то наклон настолько незначителен, что остается незаметным, пока цветные полосы не выйдут из поля зрения вверх или вниз.

Таким образом, вообще параметр μ заведует шириной полос, параметр ν их движением вверх или вниз. Знак этих параметров легко определить по движению соответствующих винтов, так как известно, что μ и ν одновременно равны нулю, когда полосы бесконечно широки. Поэтому всегда можно представить себе, как ориентирована нормаль N' относительно N (кроме тех случаев, когда они почти совпадают), и в какую сторону нужно изменять μ и ν, чтобы сблизить или развести нормали.

Теперь зададим μ и ν заведомо положительными и будем изменять μ от положительной величины μ_1 до отрицательной μ_2.

Если ν достаточно мало, то сначала заметно будет только расширение полос, но затем когда μ тоже достигнет малых величин, нулевая полоса быстро побежит вниз. Она всегда проходит через точку $\eta = 0$, $\xi = \operatorname{tg}\omega$, т. е. вращается вокруг следа нормали на (искаженной проекцией) фиг. 5. Вращаясь, она быстро — все происходит быстро, так как μ пробегает быстро узкий ряд малых значений, сравнимых с малым ν — скроется из поля зрения, сделается вертикальной одновременно с другими полосами, которые в чрезвычайно широком и расплывшемся виде останутся в поле зрения, и обратным своим концом спустится сверху в поле зрения вместе с другими цветными суживающимися полосами. Под конец, когда μ, снова сделавшись по абсолютной величине большим по сравнению с малым ν, будет приближаться к какой-то (отрицательной) величине μ_2, движение ее снова сильно замедлится. Если ν достаточно мало, то цвета в белом свете все время не будут исчезать на экране в поле зрения при прохождении μ через 0, и ясно будет видно, как граничные линии между разными цветами будут становиться вертикальными. Но не здесь мы будем искать удобную численную меру того, насколько ν отличается от нуля. Мы найдем ее следующим образом.

При $\mu = \mu_1$, какая-нибудь точка нулевой полосы находилась (под осью абсцисс), при $\eta = \eta_1$; когда процесс закончился, и $\mu = \mu_2$, ту же

точку находим (над осью абсцисс) в $\eta = \eta_2$. Из ур. (13) при $m = 0, p = 0$ имеем

$$\eta_2 - \eta_1 = \nu(\sin\omega - \xi\cos\omega)\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right).$$

Совершенно ясно, что $\eta_2 - \eta_1$ больше, меньше или равно нулю в зависимости от величины и знака ν, и ясно, как ощупью перейти от положительной малой величины ν к $\nu = 0$, подвигая полосы при начальном μ_1 понемногу вверх. Вычислим, с какой точностью это можно сделать.

Точность установки на середину полосы тем меньше, чем шире полоса; обычно принимают, что она пропорциональна ширине полосы. Обозначим через k коэффициент пропорциональности, который при беглых установках считается равным 0.1. Ошибка при установке (напр. карандашем на экране) на середину нулевой полосы при $\mu = \mu_1$, равна $\delta y_1 = kb_1$ или $\delta\eta_1 = k\sigma_1 = \frac{k\lambda}{2D}\left|\frac{1}{\mu_1}\right|$ так как в формуле (15) $\cos\gamma$ практически равен единице, полоса почти точно горизонтальна. Вторая ошибка при установке на ту же точку нулевой полосы при $\mu = \mu_2$ получается аналогично, и общая ошибка измерения величины $\eta_2 - \eta_1$ равна

$$\delta\eta_1 + \delta\eta_2 = k\frac{\lambda}{2D}\left(\left|\frac{1}{\mu_1}\right| + \left|\frac{1}{\mu_2}\right|\right).$$

Условие измеримости заключается в том, что ошибка измерения не больше измеряемой величины,

$$\delta\eta_1 + \delta\eta_2 \leqslant \eta_2 - \eta_1$$

или

$$k\frac{\lambda}{2D}\left(\left|\frac{1}{\mu_1}\right| + \left|\frac{1}{\mu_2}\right|\right) \leqslant \nu(\sin\omega - \xi\cos\omega)\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right)$$

Из этого уравнения вычисляется самая малая величина ν, которую можно еще заметить. Обозначим ее через ρ. Очевидно, что ρ наименьшее, когда μ_1 и μ_2 противоположных знаков, а тогда оно вообще не зависит от этих величин и получается из равенства

$$\rho(\sin\omega - \xi\cos\omega) = \pm\frac{k\lambda}{2D} \qquad (16)$$

Причина, почему ρ не зависит от μ_1 и μ_2, ясна. Если эти величины малы, то измеряемая величина $\eta_2 - \eta_1$ велика, но вместе с тем широки измеряемые полосы, вследствие чего расчет абсолютная ошибка, а относительная остается, таким образом, без изменения.

Положим в последней формуле $\omega = 45°, \lambda = 5\cdot10^{-4}$ мм, $D = 30$ мм, $k = 0.1$ и возьмем точку нулевой полосы на краю поля зрения $\xi = -10° = -0.175$. Тогда $\rho = 1.0\cdot10^{-6} = 0''.2$. При тщательных и повторных измерениях можно k уменьшить до 0.01, а применяя фотометрирование полос — повысить точность еще значительнее, до сотых и тысячных долей секунды, как всегда в интерфе-

рометрических измерениях; но для нашей цели особенная точность не важна. Кроме того, чтобы получить точность даже до одной секунды, нужно, чтобы механическая часть стоек интерферометров была выполнена с большим совершенством. Наконец, нужно помнить, что мы имеем дело с приближенным уравнением, и определение столь малой величины ρ в десятые доли секунды уже внушает сомнение. Действительно, согласно вышеприведенному выводу $\delta y_1 + \delta y_2$ можно сделать сколь угодно малым, увеличивая μ_1 и μ_2, а это значит, что при достаточно больших μ, иначе говоря, при достаточно тонких полосах, можно прочертить ось абсцисс на экране (или установить нить в зрительной трубе) с произвольной точностью. На самом же деле ясно, что нулевая полоса на сфере при $\nu = 0$ должна делить угол μ пополам и потому следовать за μ, отставая на половину, при колебаниях вверх и вниз. Противоречие кроется в пренебрежении членом ε^2 в ур. 5. Если мы ограничим величину μ условием, что колебания оси абсцисс $< \frac{1}{20}$ полосы, то вышеприведенный вывод и малая величина ρ сохранят свое значение, но рассмотрение второго приближения покажет, что μ не должно превышать $3'$, а ширина полос не должна быть меньше 1.5 мм в нашем примере, что и будем далее предполагать.

Только нулевую полосу можно при определенном значении ν ($\nu = 0$) сделать неподвижной во всех точках, несмотря на изменение μ. Всякую другую полосу p можно сделать неподвижной только в одной точке ξ, если подобрать

$$\nu(\sin\omega - \xi\cos\omega) = p\frac{\lambda}{2D} \qquad (17)$$

При этом полоса вращается около некоторой точки абсциссы, что и может служить методом для определения оси абсцисс с той же точностью, какая указана выше, как прямой, проходящей через две точки вращения.

Вращение для цветных или монохроматических полос происходит так, как описано выше в § 3 для нулевой полосы при введенной разности хода m (стр. 1131). Комбинируя ур. (17) с (15) и (14) получим наклон и ширину полосы p при изменении параметра μ. Легко получить уравнения, аналогичные (11), а также (12), если при $\omega = 45°$ заставить полосу вращаться около начала координат. Когда полосы вертикальны, то

$$\sigma = \frac{1}{p}$$

а это уравнение дает, как и раньше, наименьший порядок ($p = 3$) полосы, помещающейся в поле зрения. Если при фокусе $F = 30$ мм проектирующей линзы мы хотим получить вертикальные полосы в 1 см ширины, то порядок должен равняться 30.

6. Измерение разности хода. Переходим к случаю, когда в ур. (13) $m \neq 0$. Если нить трубы установлена на какую-нибудь полосу, напр. нулевую, и мы вво-

дим разность хода постепенно, то число m проходящих через нить полос определится счетом. Это обычный метод применения интерферометра.

Если при том же условии каким-нибудь образом ход одного из лучей в воздухе удлиняется скачком на величину d', то число m легко определить, если можно варьировать длину волны (в воздухе). Пусть m неизвестно для длины волны λ_1. Из двух уравнений

$$d' = m\lambda_1; \quad d' = (m + a)\lambda_2$$

можно определить m и d', если можно определить a, плавно изменяя λ. Аналогично можно поступить и в том случае, когда разность хода $(n-1)d'$ вводится в виде пластинки, если известно n как функция длины волны.

Затруднительнее положение, соответствующее нашей задаче интерферометра с зеркалами неравной толщины: разность хода (в воздухе) уже введена в интерферометр, и наблюдатель не может ее устранить, чтобы узнать положение нулевой (или какой-нибудь другой) полосы; неизвестно также, как повернуть второе зеркало, т. е. какова величина ν. Тогда нужно регулировать интерферометр, т. е. установить $\nu = 0$ и прочертить ось абсцисс, как в предыдущем параграфе, но в более трудных условиях, хотя и на основании тех же признаков. В этом случае неподвижной во всех точках может быть не нулевая полоса, а только одна полоса $p = -m$ при непременном условии $\nu = 0$. Ее нужно отыскать. Это делают ощупью, систематически изменяя ν. Прежде всего, заставляют какую-нибудь полосу вращаться около одной неподвижной точки, как в предыдущем параграфе, а затем переходят постепенно к полосам, у которых при одной неподвижной точке с одного края поля ($\xi = -\xi_1$), одновременно все менее перемещается при колебании μ от μ_1 до μ_2 еще та точка полосы, которая находится на другом краю поля ($\xi = +\xi_1$). Когда достигнута неподвижность и во второй точке, то должно быть одновременно и $\nu = 0$ и $p + m = 0$, но конечно остаются ошибки при определении той и другой величины, т. е. ν равно незаметно малой величине ρ, а $p + m$ незаметно малой величине h. Рассуждая так, как в предыдущем параграфе при получении ур. (16), имеем вместо него два уравнения для двух точек ξ

$$\rho\ (\sin\omega - \xi\cos\omega) - h\frac{\lambda}{2D} = \pm\frac{k\lambda}{2D}$$

где нужно подставить $\xi = -\xi_1$ и $\xi = +\xi_1$, а затем решить оба уравнения относительно ρ и h. Эти уравнения отличаются от (16) членом $\frac{h\lambda}{2D}$; там мы имели дело с нулевой полосой, где наперед было дано $m = 0$ и $p = 0$, здесь мы нащупываем неподвижную полосу и ошибаемся в ее порядке. За незнание нулевой полосы мы расплотимся увеличением неточности. Действительно, взяв оба уравнения с обратными знаками, получаем

$$\rho = \pm\frac{k\lambda}{2D}\frac{1}{\xi_1\cos\omega}, \quad h = \pm\frac{k\,\mathrm{tg}\,\omega}{\xi_1} \tag{18}$$

Величина ξ_1 в знаменателе указывает, что при определении направления прямой по двум точкам ошибка обратно пропорциональна ее длине ($2\xi_1$). Ошибка ρ возросла по сравнению с прежним случаем (16) в $\frac{1+\xi_1}{\xi_1} = 6.7$ раз при $\omega = 45°$ и $\xi_1 = 0.175$, так что $\rho = 1.3''$. Точность установки h на нуль всего лишь $\frac{k}{\xi_1} = 0.57$ полосы ($k = 0.1$). Она очень мала, но несомненно, что при установке более аккуратной можно без затруднения довести h до 0.1 полосы.

После того, как установлено $\nu = 0$, и проведена ось абсцисс через полосу $p = -m$, вариируя длину волны, можно, как раньше, определить m из двух уравнений. Этим задача решается до конца и со всей возможной точностью. Но, как выше указано, столь точное определение, требующее монохроматического света, и не нужно для нашей конечной цели. Вполне достаточно узнать m из наклона нулевых полос в белом свете ур. (11) или из их ширины в вертикальном положении (12). Наконец, можно определить m, вставив в оба луча интерферометра перпендикулярно к ним пластинки стекла одинаковой толщины, и затем наклоном одной из них компенсировать разность хода m. Критерием компенсации будет, то, что нулевую полосу в белом свете сделаем горизонтальной и неподвижной совершенно так, как только что изложено, и точность будет та же, что и в ур. (18). Величина m будет вычислена из измеренного угла наклона компенсирующей пластинки. Но так как разность хода в воздухе будет компенсирована разностью хода в стекле, то отсюда возникает ошибка в $2—3\%$, как было указано выше. Этот метод несколько точнее, чем методы определения по углу γ и угловой ширине σ, но менее точен, чем указанный в начале.

Теперь предстоит применить найденные методы к окончательной цели определения разности толщин двух зеркал.

7. Интерферометр с неравными зеркалами. Пусть толщина заднего зеркала (фиг. 1) с неподвижной нормалью равна $D + d$, а переднего D, так что ур. (4) получит вид

$$\Delta = p\lambda = 2D\cos i' - 2(D+d)\cos i = 2D\varepsilon \sin i \sin\beta - 2d\cos i$$

Как и для ур. 5 переходим от i, β к ϑ, φ, ψ, ω, а потом от ϑ и φ к координатам проекции на экран, т. е. к величинам ξ, η и вместе с тем от параметров ψ, ε к параметрам μ и ν. Получим последовательно

$$\frac{p\lambda}{2D} = \varepsilon\sin\psi\cos\vartheta\sin\omega - \varepsilon\sin\psi\sin\vartheta\cos\varphi\cos\omega + \varepsilon\cos\psi\sin\vartheta\sin\varphi -$$

$$-\frac{d}{D}[\cos\vartheta\cos\omega + \sin\vartheta\cos\varphi\sin\omega] = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}\left[\nu\sin\omega - \frac{d}{D}\cos\omega - \right.$$

$$\left. -\left(\nu\cos\omega + \frac{d}{D}\sin\omega\right)\xi + \mu\eta\right].$$

Пренебрегая, как и раньше $\xi^2 \leqslant 1$ и $\eta^2 \leqslant 1$, и решая уравнение относительно η, находим

$$\eta = \frac{1}{\mu}\left[-\nu \sin\omega + \frac{d}{D}\cos\omega + \left(\nu\cos\omega + \frac{d}{D}\sin\omega\right)\xi + \frac{p\lambda}{2D}\right]. \qquad (19)$$

Это уравнение преобразуем далее, прибавляя и вычитая в квадратных скобках величину $\frac{d}{D\cos\omega}$. Тогда

$$-\nu\sin\omega + \frac{d}{D}\cos\omega - \frac{d}{D\cos\omega} = -\frac{\sin\omega}{\cos\omega}\left(\nu\cos\omega + \frac{d}{D}\sin\omega\right) = -\nu'\sin\omega, \text{ если}$$

обозначим

$$\nu' = \nu + \frac{d}{D}\operatorname{tg}\omega. \qquad (20)$$

Заменим коэффициент при ξ через $\nu'\cos\omega$ и обозначим еще $\frac{2d}{\cos\omega} = m'\lambda$. Тогда

$$\eta = \frac{1}{\mu}\left[-\nu'(\sin\omega - \xi\cos\omega) + \frac{(p+m')\lambda}{2D}\right]. \qquad (21)$$

Это уравнение отличается от уравнения (13) только штрихами при ν и m, и из него можно сразу же вывести следующие формулы для угла наклона к оси абсцисс и угловой ширины полос, аналогичные формулам (13) и (14)

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\nu'}{\mu}\cos\omega. \qquad (22)$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2D}\frac{\cos\gamma}{\mu} = \frac{\lambda}{2D}\frac{\sin\gamma}{\nu'\cos\omega}. \qquad (23)$$

Преобразованное уравнение (21) показывает, что главным эффектом неравенства зеркал является введение постоянной разности хода $m'\lambda$, эквивалентной добавочной воздушной пластинке d, от которой происходит отражение под углом ω. Если мы повернем переднее зеркало вокруг вертикальной оси на угол $-\frac{d}{D}\operatorname{tg}\omega$, который в нашем случае ($\omega = 45°$; $d \leqslant 0.01$ мм; $D = 30$ мм) варьирует от $1'$ до 0 и начнем новый счет углов ν от этого нового положения, то интерферометр с неравными зеркалами ничем не будет отличаться (в нашем первом и достаточном приближении) от интерферометра с равными зеркалами, в который введена разность хода $\frac{2d}{\cos\omega}$. А так как мы не измеряем углы ν, то никогда не будет обнаружено, что шкалы их сдвинуты на $-\frac{d}{D}\operatorname{tg}\omega$.

Подбирая ощупью ν' так, как мы подбирали в предыдущем параграфе ν, например для того, чтобы нулевая полоса вращалась вокруг начала координат, мы не заметим никакой разницы в последовательности явлений. Все, что сказано в предыдущем параграфе (стр. 1140—1141) относительно случая, когда $m \neq 0$, буквально применимо к случаю неравных зеркал. Такие же углы будет делать

нулевая полоса с осью абсцисс (11); такое же соотношение между σ и m' для вертикальных полос (12); так же мы определим ось абсцисс и неподвижную полосу порядка $p = -m'$; и так же мы измерим величину m', или варьируя длину волн монохроматических полос, или при помощи ширины и угла наклона нулевой белой полосы, или, наконец, при помощи компенсатора. Одинакова будет и чувствительность измерений, и в частности сохраняет свою силу ур. (18). Отсюда легко определить и точность, до какой можно дойти, уничтожая разность толщин d зеркал сполированием выступов. Минимальная заметная толщина d определяется из условия $h = 0.57 = \frac{2d}{\lambda \cos \omega}$. При $\omega = 45°$ наименьшее $d = 0.2\lambda$, что меньше обычной интерферометрической точности, но недалеко от нее.

Теперь задача решена. Остается лишь дать точное правило определения, какое из зеркал интерферометра имеет большую толщину. Оно вытекает непосредственно из ур. (21). Если $\mu > 0$, то в поле зрения (ξ и η очень малы) можно считать $\nu' \sin \omega = \frac{m'\lambda}{D}$ и из (22) $\operatorname{tg} \gamma = \frac{m}{\mu} \frac{\lambda}{2D} \frac{1}{\operatorname{tg} \omega}$. При положительном m' имеем положительный угол γ с осью абсцисс, полосы лежат в первом ($x > 0$ и $y > 0$) и третьем квадранте системы координат (фиг. 6). Удобнее это правило выразить следующим образом. Если при уменьшении μ от положительных величин через нуль (широкие вертикальные полосы) к отрицательным, полосы переходят из первого (и третьего) квадранта к четвертому (и второму), то заднее (неподвижное) зеркало имеет большую толщину.

Когда свет падает по направлению B, а полосы наблюдаются в B', то нужно сделать следующие изменения, чтобы сохранить смысл и знаки всех формул: в фиг. 1 чертеж сферы S перенести в направление B', как зеркальное изображение в пластинке a; изменить направление N и N' на прямо противоположное; сделать зеркальное изображение фиг. 4, 5, 6 и 7 относительно NV. Тогда и вышесказанное правило остается без изменения, но следует помнить, что положительное направление оси абсцисс идет влево от наблюдателя, смотрящего по стрелке B', и что нужно вновь удостовериться, какое движение винта H поднимает конец нормали N' вверх ($\mu > 0$).

8. Реальный интерферометр. Зеркала из воздушного слоя, ограниченного стеклянными пластинками. Как уже было сказано, в обычных случаях переход от идеализированного интерферометра к реальному делается очень просто и представляет небольшую поправку, едва превышающую точность нашего приближения. Действительно, для разности хода, которую вводит одно зеркало между двумя лучами, нужно в реальном случае взять формулу (1) вместо (2). Уже сразу видно, что поправка невелика, так как отношение $\frac{g}{2D+g}$ вообще мало. В нашем интерферометре $g = 6$ мм, $D = 30$ мм и отношение равно $\frac{1}{11}$. Но поправку можно свести до полупроцента, если ввести следующим образом некоторый постоянный

множитель. Пользуясь формулой (1), найдем для разности хода, которую вносят оба зеркала интерферометра, выражение

$$\Delta = p\lambda = (2D + g)(\cos i' - \cos i) \mp ng(\cos r' - \cos r).$$

Докажем, что отношение второго члена к первому, в зависимости от изменения угла i внутри поля зрения остается постоянным в пределах приблизительно полупроцента. Для этого найдем приближенное выражение для $n\cos r'$ при малом угле ε между нормалями зеркал:

$$n\cos r' = \sqrt{n^2 - \sin^2 i'} = \sqrt{n^2 - 1 + (\cos i + \varepsilon \sin i \sin\beta)^2} =$$

$$= \sqrt{n^2 - \sin^2 i + 2\varepsilon \sin i \cos i \sin\beta} = n\cos r + \frac{\varepsilon \sin i \cos i \sin\beta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$$

Пользуясь приближением формулы (5) для первого члена, находим для искомого отношения

$$\mp \frac{\cos i}{2D + g\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

Второй множитель не зависит от β; он падает от $\frac{1}{n} = 0.67$ при $i = 0$ до нуля при $i = \frac{\pi}{2}$. В пределах поля зрения от $i = 35°$ до $i = 55°$ он изменяется лишь от 0.59 до 0.46, так что вариация всего отношения остается в пределах от 0.054 до 0.042, если взять для g и D указанные выше значения.

Следовательно, можно принять, что мы имеем дело с зеркалами из воздушной пластинки толщиной в $(1 \pm 0.048)(2D + g)$ мм. И отсюда при вычислении разности хода никогда не возникнет ошибки, превышающей 0.6% истинной величины. При выводе приближенных уравнений настоящей статьи иногда делались ошибки в три раза больше.

Здесь уместно сказать несколько слов о некоторых деталях работы с интерферометрами нашего типа.

а) Первое приближение, которым мы ограничивались во всех рассмотрениях, вполне правильно описывает характер явления и обеспечивает нужную точность измерений, если мы будем по возможности, держаться центра поля зрения. Но его недостаточность часто видна уже на глаз, так как не всегда полосы бывают в точности прямолинейны. Вертикальные полосы обнаруживают на краях поля зрения вполне заметные искривления.

б) Гораздо важнее вопрос о параллелизме пластинок a и b каждого зеркала, что отмечено было выше. Мы еще раз остановимся на нем прежде всего потому, что здесь лежит ограничение точности регулировки интерферометра. Выше мы видели, что можно добиться уменьшения угла ν (или ν') до $0''.2$. Но, конечно, эта точность имеет смысл только в том случае, если с такою же точностью параллельны пластинки a и b; иначе направление нормалей N к ним становится неопре-

деленным. Между тем обычно в этих случаях, когда пластинки сильно раздвинуты, неудобно применять для параллелизации интерференционные методы, и приходится прибегать к более грубому методу аутоколлимации. Поэтому нужно принять все меры к тому, чтобы этот метод применялся с наибольшей эффективностью. Фокус аутоколлимационной трубы должен быть около 2 м, а диаметр объектива порядка 10 см, чтобы обеспечить разрешающую силу приблизительно в $1''.5$ и возможность при помощи большой плоской поверхности такого же размера установить аутоколлимацией фокальную плоскость трубы. Если установить последнюю по зеркалам интерферометра, которые часто имеют между оправами просвет по нормали лишь в 2—3 см, то можно сделать ошибку в установке параллелизма в несколько секунд, а это уже соответствует разности толщин в разных местах одного зеркала до 1—1.5 длин волн. В первых опытах по измерению разности толщин зеркал, которые были предприняты наскоро, без достаточного теоретического анализа, совместно с Г. С. Кватером и А. И. Салищевым, главным дефектом была недостаточная параллельность пластинок. Вследствие этого наблюдались некоторые непонятные явления, хотя измерения по углу наклона пластинок и методом компенсации дали результаты недурные. Все это и вызвало изложенный здесь более детальный разбор геометрии явления, результаты которого оправдались, после того как пластинки были параллелизованы А. И. Салищевым до долей секунды.

Последний практический критерий достаточной параллельности пластинок одного зеркала — это возможность получить резкие полосы в параллельном свете, причем точно в главном фокусе фокусируются и источник света, и полосы. Малейший дефект в параллельности пластинок сказывается в расплывании полос; чтобы получить их вновь резкими, нужно сделать пучок света расходящимся и изменить плоскость фокусировки, причем часто получаются различные фокусы для различных частей интерференционной картины. В этом случае мы переходим от полос равного наклона к полосам равной толщины. Теория последней несомненно настолько сложна, что не окупилось бы время, затраченное на ее разработку. Поэтому, в случае невполне параллельных пластинок приходится вести установку интерферометра чисто эмпирически, руководствуясь лишь самыми общими соображениями.

в) Чтобы сделать пучок расходящимся и не слишком уменьшить предельный угол поля зрения, нужно проектировать источник света внутрь интерферометра, например, в точку K. Если проектирующая линза достаточно короткофокусна и следовательно, изображение источника света (обычно кратер вольтовой дуги) можно практически считать точкой, то полосы в этом случае, как и при любом явлении интерференции будут резки в любой точке пространства: они не локализованы. Линзу O тогда можно убрать, и мы получим проекцию полос на экране аналогичную «теневой» проекции. При этом, для расчета угловой ширины полос,

нужно считать за F расстояние от изображения источника света до экрана. Чем дальше пластинки a и b от параллельности, тем более изображение источника света должно походить на точку, тем меньше оно должно быть, чтобы полосы были резки. Так как часто при установке интерферометра приходится временно иметь дело с плохой параллельностью пластинок, то выгодно сначала все детали регулировки проделать при подобной теневой проекции, и лишь при окончании совершенной сборки, переходить на параллельные пучки света, если позволяет качество поверхностей.

г) До сих пор мы предполагали, что движения регулировочных винтов стоек зеркал вполне совершенны, и вращение около одной оси не сбивает другой. На самом деле это не так: интерферометры в конце концов работают ответственно только в неподвижном состоянии; измерения заключаются в счете проходящих полос; регулировочные же винты представлают чисто вспомогательный механизм, который конечно не строится с такой аккуратностью, чтобы с его помощью можно было измерять секунды. Поэтому все измерения приходится делать, подправляя одно движение другим и, разумеется, о точности в доли секунды или даже 2—3 сек. говорить не приходится.

д) Это подводит нас к основному вопросу: нужно ли в интерферометре Жамена добиваться зеркал одинаковой толщины. Уравнения (21—23) дают ясный ответ: этого делать не нужно, если только нет совершенно специальных целей. От интерферометра требуется, чтобы было легко считать полосы при введении разности хода и легко изменять их ширину. Уравнение 21 показывают, что установив наклонные при $m' \neq 0$ нулевые полосы где-нибудь около начала координат $\left(p = 0,\ \xi = \eta = 0,\ \nu' \sin\omega = \frac{m'\lambda}{2D}\right)$, мы заставляем их двигаться вверх, прибавляя некоторое m к m', т. е. вводя подлежащую измерению разность хода в интерферометр. Параметр μ и в этом случае исключительно заведует шириной полос при неизменном ν', как говорят ур. (22 и 23). Таким образом все требования выполнены: если мы проектируем для наблюдения аномальной дисперсии нулевые полосы на вертикальную щель спектографа, то получаем горизонтальные полосы в спектре, несмотря на любой наклон полос в плоскости щели. Наклон меняет в спектре лишь ширину полос, которая равна как раз $\frac{\sigma}{\cos\gamma}$ и регулируется одним только параметром μ.

Единственное соображение, которое заставляет стремиться к уменьшению γ, это то, что при конечной ширине щели и наклонных полосах, в разных точках горизонтального сечения щели будут различные по яркости части интерференционных полос, и таким образом при аномальной дисперсии будет уменьшаться несколько разрешающая сила вертикальных линий. Однако, для избежания этого, во всяком случае достаточно уменьшить γ до 5°, что соответствует при обычной

нулевой ширине полос $\sigma = \frac{1}{200}$ разности толщины d зеркал в 3 μ. Таким образом практическая задача чрезвычайно упрощается: нужно сполировать выступы так, чтобы нулевые полосы не имели наклона к горизонту более 5°. Главным затруднением в установке интерферометра является не неравенство толщин, а непараллельность пластинок.

е) Неравенство толщин зеркал не только не вредно во многих случаях, но подчас может даже принести большую пользу. Обычно при исследовании аномальной дисперсии горизонтальные интерференционные полосы проектируются на вертикальную щель спектрографа. Но иногда по ходу исследования нужно сделать интерферометр вертикальным, оставляя спектрограф горизонтальным или как раз наоборот.

Тогда необходимо повернуть полосы на 90°, чтобы они оставались перпендикулярными щели. До сих пор это делалось поворотной призмой, которая является источником больших неудобств, а также значительной потери интенсивности света. Но несравненно легче и совершеннее можно достигнуть того же, либо вводя разность хода в обычный интерферометр, либо преднамеренно изготовляя оба зеркала неравными по толщине. Формула (12) показывает, какую нужно вести для этого разность хода. Если возьмем часто встречающийся случай полос шириной в 1 мм при проектирующей линзе в 200 мм $\left(\sigma = \frac{1}{200}\right)$, то нужно ввести разность хода $m = \frac{1}{\sigma} = 200$ длин волн или 0.1 мм, или же подобрать разность толщин d зеркал так, что $\frac{2D}{\cos\omega} = 200\lambda$, откуда $d = 0.035$ мм.

Последнее легко сделать сошлифовывая выступы, на которые опираются пластинки a и b.

ж) Если таким образом в практике наблюдения аномальной дисперсии не нужно точно измерять разности толщин зеркал, то существуют задачи, где предельная точность измерения является конечной целью. Первая задача — это изготовления плоскопараллельных пластинок. Обычно отступление от параллельности контролируется на приборе Аббе. Проектируя уменьшенное изображение в 2—3 мм² источника света на пластинку, наблюдаем в отраженном свете кольца, обусловленные интерференцией лучей, отраженных от передней и задней поверхностей. Если двигать пластинку поперек падающих лучей, то ошибки в параллельности сказываются в смещении колец. Здесь мы, как бы измеряя всю толщину (двойную) пластинки, замечаем, что она неодинакова в разных ее местах. Большая разность хода требует однородного света с очень тонкими линиями, и в сущности трудно итти далее толщины в 20—30 мм. Между тем, принципиально неправильно измерять толщину, когда нас интересует только разность толщин в разных местах. Нужно сравнивать разные места пластинки друг с другом в модифицированной установке Жамена. Свет отражается под углом 45° от одной части

пластинки, а затем его возвращают назад (прямоугольная призма, две пентапризмы), так, чтобы он падал опять под углом 45° на другую часть пластинки [1]). Вводимые разности хода вычитаются друг из друга, и при небольших отступлениях от параллельности можно работать в белом свете. Стремление построить такой прибор, от которого можно ожидать больших удобств (и точности) в употреблении, было в значительной мере причиной анализа разобранных выше явлений.

Другая задача — изготовление пластинок одинаковой толщины для эшелонных спектроскопов. Обычно для эшелона полируется одна большая плоскопараллельная пластина, на которой вырезываются отдельные пластинки эшелона. Трудности изготовления больших пластин быстро растут с размерами, и этим ставится предел производству очень больших эшелонов, напр. в 100 пластин. Изготовление отдельных одинаковых пластин тоже пока слишком трудно. Но уже методы полировки на твердых поверхностях, разработанные в Гос. Оптическом институте настолько ускоряют и делают уверенным процесс изготовления плоских поверхностей, что, вероятно, скоро остановка будет только за быстрым и легким способом сравнения толщин пластинок. Явления, дискутированные выше, могут служить началом выработки такого способа.

9. Стеклянный интерферометр Жамена. Для последних двух намеченных нами задач существенно развить геометрическую сторону интерференционных явлений в том случае, когда зеркала интерферометра Жамена состоят из сплошных стеклянных пластинок. Кроме того подобные интерферометры еще употребляются и будут употребляться для многих задач, потому что, как указано в § 1, они имеют преимущество простоты конструкции и манипуляций. Но, с одной стороны, теория стеклянного интерферометра, как увидим далее, значительно сложнее, чем воздушного; с другой, при построении интерферометра со стеклянными пластинками не возникает задачи подгонки зеркал на равенство толщин. Поэтому исключительно для полноты напомним здесь основные черты различия интерференционных явлений для воздушных и стеклянных пластинок.

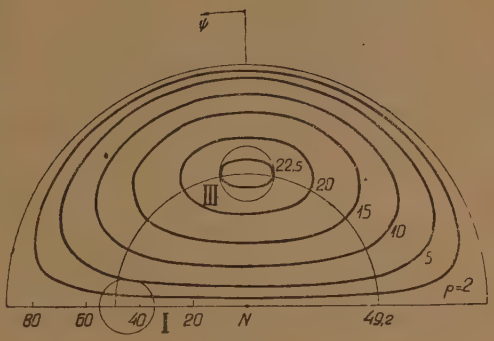
Вместо формул (2) для разности хода вступает в силу формула (3), и тогда в случае равных толщин

$$\Delta = p\lambda = 2Dn(\cos r' - \cos r) = 2D\varepsilon \sin i \sin\beta \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$$

как выше, в предыдущем параграфе. Задавая β, вычисляем i и находим ряд кривых равной разности хода различных порядков, которые для частного случая $D = 30$ мм, $n = 1.5$, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ мм нанесены на фиг. 8. Существенное отличие от воздушных пластинок заключается в том, что кривые являются замкнутыми. Это, впрочем сразу видно из того, что при любом β величина Δ равна 0 не только

[1] См. наприм. Жамен, Маскар, Кеттелер; литература у E. Gehrcke, Handb. d. phys. Optik, I, 1926, стр. 448.

при $i = 0$, но и при $i = \frac{\pi}{2}$; для некоторого же среднего i ($= 49°.1$ для $n = 1.5$)[1] она имеет максимальное значение. Фиг. 8 вполне соответствует фиг. 5 (ее верхней части); она также воспроизводит случай $\psi = 0$ ($\nu = 0$), и если бы можно было изменять только параметр ψ, оставляя ε неизменным, то вращая фиг. 8 по стрелке, мы видели бы, как проходят через поле зрения полосы и как они изменяют свою форму. При повороте ψ на $\frac{\pi}{2}$ мы имели бы в поле зрения замкнутые фигуры с центром при $i = 49°.1$ ($n = 1.6$). Максимальное возможное p равно 22.92. Полоса, соответствующая минимуму $p = 22.5$ целиком умещается в поле зрения. Отсюда уже ясно, что в этом случае, несомненно, первое приближение относительно ξ и η, которое до известной степени удовлетворяло нас при воздушных пластинках, здесь теряет всякий смысл.



Фиг. 8.

С другой стороны, интерферометр Жамена всегда употребляется при ν, почти равном нулю в непосредственной близости к горизонтальным нулевым полосам. При достаточно малом поле зрения тогда все же первое приближение удовлетворительно, как показывает фиг. 8. Однако в этом случае теория просто совсем не нужна. Чтобы овладеть вполне интерферометром, нужно знать только следующее: при вращении винта, изменяющего ν, полосы подвигаются вверх или вниз, а параметра ρ их расширяет.

Для намеченных же выше задач необходимо перейти ко второму приближению, которое развивать здесь не место.

D. ROSCHDESTVENSKY. INTERFEROMETER FÜR UNTERSUCHUNGEN ÜBER ANOMALE DISPERSION.

Bei den Untersuchungen über anomale Dispersion nach der Methode von Pucciant, bietet oft die Beobachtung mittelst des Jamin'schen Interferometers Unbequemlichkeiten erstens, weil die interferierenden parallelen Strahlen nicht genügend weit auseinander gesetzt werden können und, zweitens, weil die dicken Platten der Jamin'schen Spiegeln bei intensiver Beleuchtung sich langsam erwärmen, was ein stetiges Wandern der Interferometerstreifen zur Folge hat. Wenn man jeden Spiegel durch ein Paar dünner paralleler Platten, welche ihrerseits planparallel sind, ersetzt, so fallen die genannten Schwierigkeiten weg, aber es entsteht eine neue Schwierigkeit, den Abstand zwischen den

[1] См. Ketteler, loc. cit.

Platten bei jedem Paar genau gleich zu machen, was ebenso nötig ist, wie die genaue Identität der Dicken der Jamin'schen Spiegeln.

Es werden hier die Gestalt und Bewegungen der Interferenzstreifen, welche eine Messung der Differenz des Abstände beider Plattenpaaren ermöglichen, analysiert und die erreichbare Genauigkeit bei der Beseitigung dieser Differenz discutiert. Fernen wird die unbedingt nötige Genauigkeitsgrenze ermittelt und gezeigt, das Paaren von Platten mit ungleichen Abständen es möglich machen nötigenfalls die gewöhnlichen horizontalen Streifen des Jamin'schen Interferometers in vertikale zu verwandeln. Über einige andere Anwendungen der obigen Analyse der Interferenzstreifen, welche zur Verfertigung planparalleller Glasplatten, oder Glasplatten von identischer Dicke nützlich sein können, wird berichtet.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ВНЕШНЯЯ И ВНУТРЕННЯЯ ДИНАМИКА РЫБЫ[1]

В. В. ШУЛЕЙКИНА

(*Представлено академиком* П. П. Лазаревым)

Анализируя движение летучей рыбы[2] мне удалось показать в 1928 г., что перед взлетом эта рыба движется по поверхности воды, скользя по ней выступом, находящимся на нижней части головы и играющим роль настоящего редана глиссера. Оказалось, что при этом рыба может развить скорость, превышающую 15 м в секунду, работая хвостовым плавником (нижней его долей), вибрирующим с весьма большой частотой.

Было вполне очевидно, что достижение таких громадных скоростей возможно лишь при наличии весьма совершенного движителя, каковым и является хвост рыбы. Но столь же очевидным было и то обстоятельство, что простое колебание хвоста вправо и влево отнюдь не обеспечило бы такого совершенства в работе движителя.

Особенно ясным представится это обстоятельство тогда, когда от рыбы, скользящей по поверхности воды, мы перейдем к рыбе, активно плывущей в толще воды: движения хвоста здесь должны будут происходить таким образом, чтобы тело рыбы непрерывно отталкивалось вперед, — чтобы не существовало никаких «возвратных», тормозящих движений у элементов корпуса рыбы.

Нетрудно обнаружить, что чрезвычайно просто это условие выполняется при движении змеевидного типа, при котором удлиненное тело змеи непрерывно изгибается по синусоиде: в данном случае, как легко убедиться, по телу змеи бежит волна поперечных колебаний, от головы ко хвосту, а потому сам процесс движения следует трактовать, как движение твердой волны, перемещающейся в водной среде. В этой статье мы попытаемся исследовать кинематику и динамику такого движения, распространив анализ и на рыб обычно формы, сильно отличающейся от формы змеи.

[1] Доложено на сессии Академии Наук СССР (Физ.-мат. группа) 26 апреля 1934 г.
[2] В. В. Шулейкин. Аэродинамика летучей рыбы. Изв. Акад. Наук, 1928.

§ 1. Движение змеевидного типа: твердая волна с постоянной амплитудой

Ближе всего к этому типу подходит движение угря, хотя, строго говоря, поперечные колебания, совершаемые его головой, обладают амплитудой несколько меньшей, чем амплитуда поперечных колебаний хвоста. Тем не менее, здесь мы будем полагать амплитуду колебаний идеально-постоянной по всему телу угря, ибо о поправках к такому упрощенному анализу будет легко судить на основании последующего раздела этой статьи.

Первоначально допустим, что лобового сопротивления и трения при движении «идеального» угря не существует. Легко видеть, что в таком случае скорость поступательного движения угря может равняться скорости распространения волны по его телу, от головы к хвосту. В самом деле, если скорость поступательного движения угря будет $-v$, а скорость распространения волны по его телу c (предполагается, что рыба движется в отрицательном направлении по оси абсцисс, а волна — в положительном направлении), то скорость твердой волны относительно воды, т. е. $(c-v)$ окажется равной нулю: форма волны как бы застынет в водной среде, а тело рыбы будет без сопротивления скользить внутри этой формы, как схематически изображено на фиг. 1 a.

Никакого взаимодействия между твердой волной и водой здесь не существует, а потому подобный случай не может иметь места при наличии каких бы то ни было сил, сопротивляющихся движению.

Как только возникнут эти силы, так одновременно появится необходимость в непрерывном отталкивании тела рыбы по направлению поступательного ее движения.

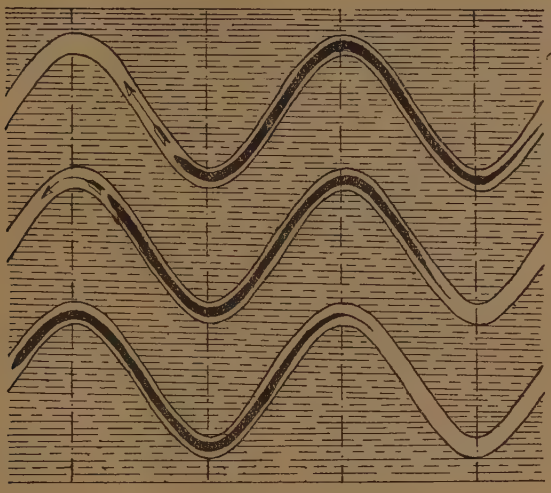
Чрезвычайно просто такое непрерывное отталкивание осуществляется, при условии, что по абсолютной величине $v < c$; тогда, как легко показать, форма волны будет перемещаться в воде со скоростью $(c-v)$ по направлению назад и эта-то форма, как раз будет отталкиваться от воды, заставляя угря двигаться вперед со скоростью v. Схематически подобный процесс представлен на фиг. 1 b, где условно изображен «волновой канал», внутри которого движется рыба, причем канал этот как бы простирается за пределы самого корпуса рыбы; в действительности, разумеется «форма» волны пробегает в пространстве только отрезок, занятый самим телом рыбы.

На протяжении тела рыбы, обладающей змеевидной формой, обычно, укладываются приблизительно две полных волны, а потому динамика ее движения может быть необычайно просто связана с кинематикой.

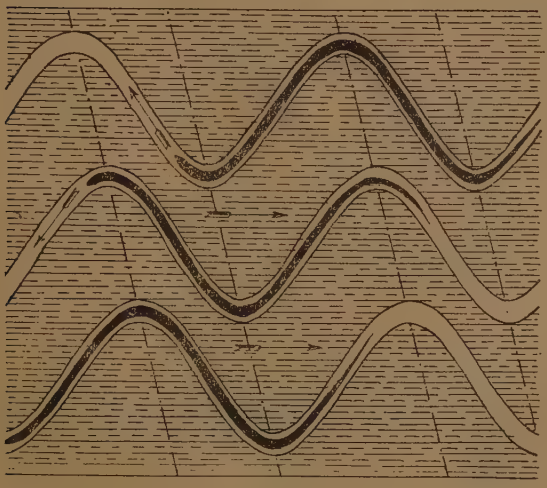
Именно, нет надобности находить никаких сил взаимодействия между отдельными элементами тела и окружающей водой: достаточно будет представить себе, что рыба, изогнутая в виде синусоиды (на протяжении двух волн) совершенно затвердела и что такое изогнутое тело перемещается назад со скоростью $(c-v)$.

Как и во всех задачах экспериментальной гидродинамики, можно полагать, что сила, сопротивляющаяся такому движению, будет пропорциональна квадрату скорости движения в воде. То есть:

$$f_1 = B(c - v)^2, \tag{1}$$



Фиг. 1a



Фиг. 1b

где B обозначает некоторый коэффициент сопротивления, очевидно тем больший, чем больше амплитуда синусоиды, определяющей застывшую форму тела.

С достаточной точностью, найденную силу можно считать равной той силе с которой змеевидно-изгибающаяся рыба отталкивается при своем естественном

движении. Но, с другой стороны, при условии установившегося движения, эта сила должна равняться силе f, сопротивляющейся поступательному движению рыбы и выражаемой соотношением, аналогичным (1):

$$f = b \cdot v^2. \tag{2}$$

Здесь b обозначает коэффициент сопротивления, который характеризует скольжение прямолинейно-вытянувшегося тела рыбы в водной среде со скоростью v. Хотя здесь тело рыбы скользит не в прямолинейной «форме», а в форме, изогнутой по синусоиде, но коэффициент b можно считать тем же. Зато, при обычных значениях амплитуд поперечных колебаний, придется принять во внимание, что проходя вперед со скоростью v, рыба должна в действительности скользить внутри синусоидальной «формы» со скоростью v_1, большей чем v и притом большей во столько раз, во сколько длина самой синусоиды превышает длину соответствующего отрезка оси абсцисс.

На основании простых геометрических соотношений можно показать, что:

$$v_1 = \left[1 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{L}\right)^2\right] = \varkappa v, \tag{3}$$

где a обозначает амплитуду поперечных колебаний, L длину тела, причем предполагается, что на протяжении L укладываются две полных волны λ.

Приняв во внимание, что исправленное соотношение «2» придется переписать в форме:

$$f = b \cdot \varkappa^2 \cdot v^2 \tag{4}$$

и что при условии установившегося движения силы f и f_1 должны быть равны между собою по абсолютной величине, нетрудно убедиться, что динамика змеевидного движения определяется уравнением:

$$b\varkappa^2 v^2 = B(c - v)^2 \tag{5}$$

из которого непосредственно вытекает, что:

$$\frac{c}{v} = 1 + \varkappa\sqrt{\frac{b}{B}}. \tag{6}$$

Таким простым соотношением связаны между собою скорость поступательного движения v, скорость волны, бегущей по телу c и оба характеристических коэффициента сопротивления b и B.

Из последних величин b может быть определено путем протаскивания тела мертвого угря, предварительно спрямленного и затвердевшего в формалине, а B — путем протаскивания тела той же рыбы, но предварительно наложенного на синусоидальный шаблон и вслед затем погруженного в формалин, для фиксации формы. Зная отношение $\frac{b}{B}$, легко найти отношение $\frac{c}{v}$.

Наоборот, если неизвестно отношение $\frac{b}{B}$, то его можно определить по киноснимкам движущейся рыбы, определяя по ним значения c, v и $\varkappa$.

Что касается поправочного коэффициента $\varkappa$, то для суждения о его возможных величинах, уместно будет найти по формуле «3», что

при $a:L=1:3$, $\varkappa=1.17$
а при $a:L=1:5$, $\varkappa=1.06$.

Разумеется, при меньших амплитудах поперечных колебаний, коэффициент $\varkappa$ можно полагать просто равным единице и считать, что

$$\frac{c}{v}=1+\sqrt{\frac{b}{B}}. \tag{7}$$

Академик С. А. Зернов и проф. В. В. Алпатов любезно сообщили мне, что Грэем произведена большая серия киносъемок, напечатанная в «Journal of Experimental Biology».[1] Разумеется, я поспешил воспользоваться превосходными фотографиями этого автора для вычисления по ним отношения коэффициентов $\frac{b}{B}$.

Для одного случая, когда угорь двигался вперед со скоростью $v=4$ см/сек., а волна по его телу распространялась со скоростью $c=6.2$ см/сек., отношение $\frac{c}{v}$ было равно 1.55, а стало быть, для удобства преобразовав формулу (7) в

$$\frac{B}{b}=\left(\frac{v}{c-v}\right)^2 \qquad \text{III. (8)}$$

можно показать, что здесь было:

$$\frac{B}{b}=3.3.$$

Другой очень интересный случай соответствовал движению угря *вспять*. Здесь было $v=6.2$ см/сек, $c=8.3$ см/сек, а стало быть $\frac{c}{v}=1.34$. По формуле (8) оказалось, что в данном случае:

$$\frac{B}{b}=8.7.$$

Такая большая величина отношения $\frac{B}{b}$ достигалась здесь за счет довольно большой *амплитуды* поперечных колебаний ($a:L=1:8$).

§ 2. Движение, характерное для большинства рыб: твердая волна с нарастающей амплитудой. Упрощенный анализ

Выше уже упоминалось, что движение угря слегка отличается от змеевидного типа, ибо амплитуда поперечных колебаний головы оказывается несколько

[1] J. Gray. Studies of Animal Locomotion. J. Ex. Biol., 10, 1933, p. 88.

меньшей, чем амплитуда колебаний хвоста. Еще несравненно резче подобное различие сказывается при движении большинства других типов рыб: там амплитуды колебаний головы бывают чрезвычайно малы по сравнению с амплитудами хвоста.

Следовательно, если механизм отталкивания рыбы при движении вперед мы захотим объяснить, исходя из того же принципа твердой волны, который дал такие хорошие результаты в применении к угрю, то нам придется предположить, что по телу обычной рыбы (весьма сильно отличающейся от змеи), бежит со скоростью c волна с переменной амплитудой: с амплитудой, возрастающей при движении от головы ко хвосту.

Допустим, что это возрастание идет по обычному экспоненциальному закону, ибо в противном случае анализ оказался бы чрезвычайно сложным, громоздким и неубедительным. К слову сказать, есть серьезные основания полагать, что такой закон достаточно хорошо описывает процесс: так, например, в случае движения угря, сфотографированного Грэем, отношение амплитуды колебаний хвоста к амплитуде колебаний середины корпуса оказалось в точности равным отношению амплитуды колебаний средины к амплитуде колебаний головы; а это обстоятельство, как известно, соответствует как раз экспоненциальному закону изменения амплитуд колебаний.

Итак, положим, что волна, бегущая вдоль тела рыбы, выражается уравнением:

$$y = a \cdot e^{\beta x} \cdot \sin \gamma \left(t + \frac{x}{c} \right) \tag{9}$$

причем:

$$\gamma = \frac{2\pi}{T},$$

Здесь a обозначает амплитуду поперечных колебаний головы, x расстояние исследуемой точки от начала координат, совпадающего с передним концом головы рыбы, β фактор, характеризующий быстроту нарастания амплитуды, по мере продвижения волны по направлению к хвосту, t — текущее время, а T период колебаний. Необходимо отметить следующее обстоятельство: как и в предыдущем случае, так и теперь, анализируется только форма деформирующегося тела рыбы, совершенно независимо от индивидуальных колебаний того или иного участка ее тела. Вот почему, в рассмотрение не входят те движения, которые будут проделывать эти индивидуальные элементы вдоль синусоиды в случае змеи, или вдоль более сложной кривой, исследуемой в настоящем разделе; следовательно для каждого определенного x ордината y будет в каждый момент времени измерять отклонение от оси абсцисс одной и той же точки «формы», но совсем не одного и того же элемента тела рыбы. Каждый элемент тела описывает восьмерки, которые исследовал Грэй и которые не

имеют никакого значения при нашем анализе движения «формы». Мало того, — исследование движений каждого индивидуального участка тела рыбы не позволило бы так просто разобраться во внешней динамике рыбы, как позволяет исследование движения «формы» сквозь тело рыбы.

На фиг. 2 представлены 10 различных фаз движения твердой волны, причем форма хребта рыбы, изображенного белой линией, вычислена по формуле 9, а тело рыбы нанесено на чертеж лишь для наглядности, — чтобы удобнее было сопоставить фазы продвижения волны от головы ко хвосту с теми изгибами, которые в действительности совершает рыба. Предположено, что по длине тела помещается одна полная волна: следовательно длина волны λ равна длине корпуса L.

Логарифмический инкремент нарастания волны:[1]

$$\delta = \beta\lambda \qquad (10)$$

выбран с таким расчетом, чтобы амплитуда колебаний хвоста оказалась в 16 раз большей, чем амплитуда колебаний переднего конца головы. Разность фаз между каждыми двумя соседними изображениями на фиг. 10 соответствует одной десятой части периода колебаний, — следовательно, одной десятой части того промежутка времени, в течение которого рыба успеет сделать один полный взмах хвостом (и вправо и влево).

Для наглядности чертежа, амплитуды поперечных колебаний взяты больше тех, которые обычно наблюдаются в действительности: отклонение хвоста от средней оси (в каждую сторону) составляет 0.4 от длины рыбы. В действительности же оно обычно не превышает 0.25 от длины рыбы. В дальнейшем будет показано, что подобное преувеличение амплитуд не препят-

Фиг. 2

[1] Название употреблено по аналогии с декрементом затухающей волны.

ствует определению всех необходимых величин, характеризующих действительное движение рыбы, причем для этого достаточно сделать простой пересчет, соответствующий изменению масштаба поперечных отклонений в отношении 0.25:04.

В предыдущем параграфе, внешняя динамика змеевидного движения рыбы была связана с кинематикой этого движения. Теперь попытаемся вывести основные кинематические соотношения применительные к новым условиям — применительно к движению возрастающей твердой волны. Как увидим, они будут в корне отличны от прежних.

В основу анализа снова положим элементарное требование активного движения всех участков формы. Другими словами, потребуем, чтобы ни один из этих участков не обладал скоростью относительно воды, направленной вперед. Нетрудно облечь это требование в весьма простую функциональную форму, воспользовавшись некоторым вспомогательным геометрическим построением.

В самом деле, положим, что в направлении оси абсцисс слева направо бежит волна, мгновенное положение которой изображено на фиг. 3. Представим себе весьма тонкую щель, протянувшуюся параллельно оси x и отстоящую от нее на некотором расстоянии y_1. Тогда сквозь эту щель будет видно движение хребта рыбы, которое на схеме изобразится в виде движения точки пересечения волны с прямой MN, проведенной на фиг. 3 параллельно оси x, на расстоянии y_1 от последней. Совершенно неважно, что в каждый данный момент точка пересечения оказывается смещенной не только по прямой MN, но и по самой кривой, изображающей хребет рыбы: важно только, чтобы скорость движения точки D по прямой MN не была меньше скорости поступательного движения рыбы (v), направленной в противоположную сторону. Разумеется, как и прежде, приняв последнюю формулировку основного условия, приходится считать, что начало координатной системы движется относительно воды вместе с рыбой.

Не трудно найти выражение для скорости движения точки D по прямой MN, в такой подвижной координатной системе. В самом деле, решив уравнение волны (9) совместно с уравнением прямой:

$$y - y_1 = 0$$

найдем, что абсцисса точки D должна быть связана с временем следующей зависимостью:

$$a \cdot e^{\beta x} \cdot \sin\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right) = y_1. \tag{11}$$

Возьмем полный дифференциал от левой части и приравняем его нулю, так как в правой части стоит постоянная величина. Сокращенно обозначая левую часть через y, найдем:

$$\frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial t}\cdot dt = 0$$

откуда:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial y}{\partial x}}. \tag{12}$$

Но, на основании (9),

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a\gamma e^{\beta x} \cdot \cos\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right) \tag{13}$$

и

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a\beta e^{\beta x} \sin\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right) + a\frac{\gamma}{c} e^{\beta x} \cdot \cos\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right) \tag{14}$$

Фиг. 3

а стало быть, на основании (12) определится непосредственно интересующая нас скорость $\frac{dx}{dt}$ движения точки D вдоль прямой MN. По основному условию, должно быть:

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| \geqslant |v|. \tag{15}$$

Или, на основании выражений (12), (13) и (14) (после сокращения на $a \cdot e^{\beta x}$)

$$\frac{\gamma \cdot \cos\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right)}{\beta \cdot \sin\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right) + \frac{\gamma}{c} \cdot \cos\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right)} \geqslant v. \tag{16}$$

Представим полученное неравенство в несколько иной форме:

$$\left[\frac{\beta}{\gamma} \cdot v \cdot \sin\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right) + \frac{v}{c}\cos\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right)\right] \leqslant \cos\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right). \tag{17}$$

В такой форме особенно отчетливо всплывает кинематическое различие между движением твердой волны постоянной амплитуды и движением твердой волны возрастающей.

В самом деле, при постоянстве амплитуд по всей длине тела рыбы, т. е., при $\beta = 0$, неравенство (17) удовлетворяется чрезвычайно легко, ибо оно автоматически переходит в неравенство:

$$\frac{v}{c}\cos\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right) \leqslant \cos\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right) \text{ а стало быть: } c \geqslant v. \tag{18}$$

Как было уже указано в предыдущем разделе, знак равенства появился бы в (18), если бы движение змееобразной рыбы не встречало в воде никаких сопротивляющихся сил. В реальных условиях, при наличии сопротивления среды, между c и v устанавливается зависимость, которая, как помним, определяется формулой (6), или проще (7).

Совсем не так обстоит дело в случае, который теперь нас интересует, т. е. когда волна возрастает от головы ко хвосту ($\beta > 0$).

Здесь оказывается принципиально невозможным удовлетворить неравенство (17) при всех значениях аргумента тригонометрических функций, т. е. — для любого момента времени и для любого участка вдоль по оси x (равным образом, для разных значений y_1). Это — чрезвычайно важное заключение, показывающее, что каждый участок формы волны, при своем движении вдоль оси x, на некотором отрезке пути неизбежно оказывает тормозящее действие, ибо в течение некоторого промежутка времени для него оказывается

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| < |v|.$$

В дальнейшем будет выведено соотношение, которое позволит найти, при каких условиях данный элемент формы волны может продолжать оставаться все же «полезным» т. е., при каких условиях его полная работа за все продвижение по прямой MN (в пределах, соответствующих размерам рыбы) оказывается положительной. Заранее надо сказать, что такое соотношение будет весьма сложным и неудобным для многих сторон исследования.

Поэтому, для предварительного, неточного, схематического, но зато наглядного исследования, заменим неравенство (18) некоторым отдаленным его подобием: другими словами, посмотрим, при каких условиях неравенство (18) удовлетворится применительно к среднему значению аргументов тригонометрических функций?

Для получения такой схемы, положим, следовательно, что:

$$\cos\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right) = \sin\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

а стало быть:

$$\frac{\beta}{\gamma}v + \frac{v}{c} \leqslant 1. \tag{19}$$

Хотя полученное выражение и является, строго говоря, фиктивным, но оно позволяет, тем не менее, выяснить некоторые важные особенности движения возрастающей твердой волны.

В самом деле, подставим в (19) выражения β и γ через другие элементы волны. Именно:

$$\left.\begin{aligned}\beta &= \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\delta}{cT}\\ \gamma &= \frac{2\pi}{T}\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

где попрежнему через δ обозначен логарифмический инкремент волны.

Тогда, после простых преобразований, из (19) получится весьма компактное соотношение:

$$\frac{c}{v} \geqslant 1 + \frac{\delta}{2\pi}. \tag{21}$$

Помня о некоторой условности вывода, можно все же считать полученное соотношение (21) своего рода добавлением к формулам (6) или (7), соответствовавшим волне с постоянной амплитудой. Здесь, в случае возрастающей волны, отношение коэффициентов сопротивления $\frac{b}{B}$ еще не определяет собою всех кинематических особенностей движения: здесь всплывает еще новый фактор $\frac{\delta}{2\pi}$, который должен «условно» подчиниться схематическому соотношению (21).

Между прочим, отметим, что (21) вполне удовлетворяет предельному условию: при $\delta = 0$, оно переходит в знакомое соотношение: $\frac{c}{v} \geqslant 1$.

На первый взгляд может показаться, что при неограниченном возрастании скорости волны по телу рыбы, путь, проходимый рыбой в воде, за один взмах хвоста (за период T) будет также неограниченно возрастать. Однако, легко показать, что это не верно.

В самом деле, помножим числитель и знаменатель левой части (21) на T. Тогда, вспоминая соотношения (20), найдем:

$$\frac{\lambda}{vT} \geqslant 1 + \frac{\beta\lambda}{2\pi}; \quad vT \leqslant \frac{\lambda}{1 + \frac{\beta}{2\pi}\lambda} \tag{22}$$

или, для краткости обозначая через $\mathbf{X}$ искомую длину пути, проходимого рыбой за один полный размах хвоста ($\mathbf{X} = vT$) и через Λ величину $\frac{2\pi}{\beta}$ (зависящую от нарастания амплитуд), — в иной форме:

$$\frac{1}{\mathbf{X}} \geqslant \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\Lambda}. \tag{23}$$

Любопытные соотношения (22) и (23) показывают, что при непрерывном возрастании скорости волны c (T предполагается постоянным), ведущем к воз-

растанию λ, — путь, проходимый рыбой за один полный взмах хвоста (vT) стремится к некоторому определенному и конечному пределу:

$$\lim |vT|_{c=\infty} = \Lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \tag{24}$$

Весьма хорошей и, притом, универсальной характеристикой движения рыбы, может служить отношение пути vT (за период) к длине ее тела L. Если мы к той же длине L отнесем и предел, к которому стремится vT, то вместо правой части равенства (24), получим дробь, в знаменателе которой будет стоять произведение βL. Но легко видеть, что, на основании (9), величина βL должна равняться логарифму (натуральному) отношения амплитуды колебаний хвоста (A) к амплитуде колебания головы (a). Другими словами,

$$\lim \left| \frac{X}{L} \right|_{c=\infty} = \frac{2\pi}{\lg \frac{A}{a}}. \tag{25}$$

Итак, отношение $\frac{A}{a}$ определяет собою предел, к которому стремится перемещение рыбы (за взмах хвоста), при неограниченном возрастании скорости волны c по ее телу.

На фиг. 4, для примера, изображены три кривые, выражающие закон нарастания $\frac{X}{L}$, по мере увеличения скорости c. По оси абсцисс отложены величины, пропорциональные c: значения отношения $\frac{\lambda}{L}$, а по оси ординат — интересующие нас величины $\frac{X}{L}$. Одна из кривых соответствует значению: $\frac{A}{a} = 8$, другая $\frac{A}{a} = 16$, а третья $\frac{A}{a} = 32$. Как видим, в первом случае $\frac{X}{L}$ стремится к предельной величине, равной 3.27, во втором — к предельной величине 2.26, а в третьем — к 1.81.

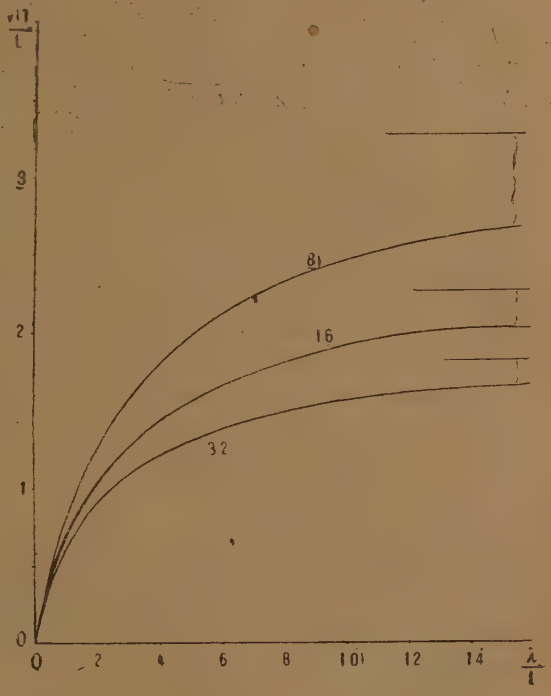
Разумеется, бо́льшая часть каждой из кривых, изображенных на фиг. 4, соответствует таким большим скоростям волны, каких в природе не существует: отношение $\frac{\lambda}{L}$ обычно никогда не превышает единицы. Эти «абстрактные» участки кривых приведены лишь для того, чтобы показать тенденцию их протекания. Но весьма любопытно, что несмотря на произвольное допущение, лежащее в основе нашей предварительной схемы, числовые результаты, которые можно получить в конкретных случаях из диаграммы фиг. 4 — очень хорошо согласуются с наблюдениями.

В самом деле, в прекрасной экспериментальной работе Грэя, цитировавшейся выше, приведен целый ряд киноснимков различных движущихся рыб:

трески, макрели, акулы и др., причем для них величина $\frac{\lambda}{L}$ составляла от 0.65 до 0.95, а величина $\frac{vT}{L}$ — около 0.5. Нетрудно видеть, что по диаграмме фиг. 4, (по средней из трех кривых) для $\frac{\lambda}{L} = 0.75$, получается: $\frac{vT}{L} = 0.52$.

Как и следовало ожидать, результат, полученный путем вычисления, оказывается несколько преувеличенным, ибо, удовлетворяя фиктивному условию (19), рыба не удовлетворяет основному условию абсолютно-наивыгоднейшего движения, а потому — принуждена двигаться со скоростью несколько меньшей. Но, тем не менее, хорошее совпадение порядков вычисленной и наблюденной величины достаточно оправдывает наш предварительный упрощенный анализ.

Что касается самих величин vT и $\frac{vT}{L}$, то, по справедливости, первую из них можно называть шагом рыбы, а вторую — приведенным шагом рыбы.



Фиг. 4

§ 3. Более строгий анализ возрастающей волны. Силы и моменты, действующие на рыбу

Возвратимся теперь к неравенству (16), которому, как было сказано выше, возрастающая волна может удовлетворить не при всех значениях аргумента тригонометрических функций. Рассмотрим не всю волну, а снова только бесконечно-малый участок, бегущий вдоль какой-нибудь прямой MN (фиг. 3).

Прежде всего, преобразуем выражение (16), воспользовавшись соотношением (11), в котором, для краткости, обозначим амплитуду колебаний в точке с абсциссой x через $\mathfrak{A}$; другими словами, положим, что

$$a \cdot e^{\beta x} = \mathfrak{A}, \qquad (26)$$

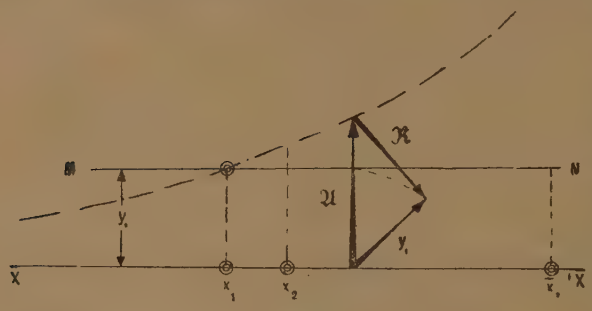
Тогда, как легко видеть, окажется:

$$\left.\begin{aligned} \sin\gamma\left(t+\frac{x}{c}\right) &= \frac{y_1}{\mathfrak{A}} \\ \text{и} \\ \cos\gamma\left(t+\frac{x}{c}\right) &= \sqrt{1-\left(\frac{y_1}{\mathfrak{A}}\right)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

а стало быть, вместо (16), напишется (после простейших преобразований):

$$\frac{\gamma\sqrt{\mathfrak{A}^2-y_1^2}}{\beta y_1+\frac{\gamma}{c}\cdot\sqrt{\mathfrak{A}^2-y_1^2}} \geqslant v. \qquad (28)$$

В свою очередь, радикал $\sqrt{\mathfrak{A}^2-y_1^2}$, входящий и в числитель и в знаменатель левой части, представляет собою не что иное, как величину катета, построенного на отрезке $\mathfrak{A}$, как на гипотенузе и на отрезке y_1, как на другом катете. Для того, чтобы наглядно видеть, как будет изменяться переменный катет $\sqrt{\mathfrak{A}^2-y_1^2}$, при постоянном y_1 и изменяющейся гипотенузе $\mathfrak{A}$, прибегнем к схематическому построению фиг. 5. На нем



Фиг. 5

пунктирная кривая выражает закон нарастания амплитуд по мере приближения от головы ко хвосту. Остальные элементы чертежа отмечены соответствующими буквами и в пояснениях не нуждаются. В частности, интересующий нас теперь переменный катет обозначен буквой $\mathfrak{R}$, которой условимся его обозначать и в дальнейшем изложении.

Воспользуемся этим обозначением $\sqrt{\mathfrak{A}^2-y_1^2}=\mathfrak{R}$ и разделим числитель и знаменатель левой части (28) на $\frac{\gamma}{c}\cdot\mathfrak{R}$.

Тогда получим соотношение:

$$\frac{c}{1+c\frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{y_1}{\mathfrak{R}}} \geqslant v \qquad (29)$$

очень удобное для исследования.

Прежде всего, структура формулы (29) совершенно аналогична формуле (22), что является новым оправданием упрощенного анализа, произведенного в предыдущем разделе.

Затем, из (29) с очевидностью вытекает, что при малых величинах $\mathfrak{R}$, основное кинематическое условие идеального движения неминуемо будет на-

рушаться: скорость движения точки D по прямой MN на фиг. 3, при малых $\mathfrak{R}$ будет меньше скорости поступательного движения рыбы в воде. Другими словами, при малых $\mathfrak{R}$, соответствующий элементарный участок формы волны (в точке D) будет двигаться относительно воды в сторону, совпадающую с направлением движения рыбы, а стало быть будет тормозить ее движение.

Критическое значение дроби $\left(\frac{y_1}{\mathfrak{R}}\right)_{cr}$, при котором активная работа элемента твердой волны переходит в работу паразитическую (тормозящую движение рыбы) весьма просто может быть найдено из (29). Именно, как легко видеть

$$\left(\frac{y_1}{\mathfrak{R}}\right)_{cr} = \frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right) \tag{30}$$

или, после элементарных преобразований:

$$\left(\frac{y_1}{\mathfrak{R}}\right)_{cr} = \frac{2\pi}{\delta}\frac{(c-v)}{v}. \tag{31}$$

Пусть это критическое значение дроби $\left(\frac{y_1}{\mathfrak{R}}\right)_{cr}$ соответствует некоторой абсциссе x_2 (фиг. 3), пусть, с другой стороны, некоторая абсцисса x_1 (на той же фиг.) соответствует значению $\mathfrak{R} = 0$, и, наконец, пусть при абсциссе, равной x_3 элемент D, соскользнет с конца хвостового плавника рыбы, перестав существовать реально.

Тогда окажется, что на пути, равном отрезку

$$x_2 - x_1$$

элемент твердой волны D будет производить отрицательную работу (тормозя движение рыбы), а на пути, равном отрезку

$$x_3 - x_2,$$

он произведет работу положительную, способствующую движению вперед.

Обозначим абсолютную величину отрицательной работы на первом из рассмотренных этапов, через P_1, а абсолютную величину положительной работы на втором этапе — через P_2.

В таком случае, для рыбы, представляющей собою возрастающую волну и не удовлетворяющей условию абсолютно-наивыгоднейшего движения, мы можем формулировать новое условие, при котором движение будет наиболее выгодным из всех возможных. Легко видеть, что подобное условие теперь напрашивается само собою. Символическая форма его такова:

$$P_2 \geqslant P_1. \tag{32}$$

Так же нетрудно видеть, что условие (32) автоматически выполняется для участков D, скользящих вдоль по самой оси абсцисс, ибо при $y_1 = 0$, исходное выражение (29) переходит в

$$c \geqslant v$$

т. е. в условие, характерное для волны постоянной амплитуды (§ 1). Причина здесь весьма проста: в самом деле, дробь, стоящая в левой части неравенства (29), выражает собою, как помним, скорость движения элемента D вдоль прямой; при MN (когда MN совпадает с осью абсцисс) вся эта левая часть обращается в c, т. е., иными словами, элемент D движется вдоль оси абсцисс с той же скоростью, с которой двигалась бы она и при $\delta = 0$ (со скоростью волны).

Совсем иначе обстоит дело с элементами, которые движутся вдоль прямых MN, более или менее удаленных от оси абсцисс.

Здесь символическая зависимость (32), будучи расшифрована, приобретает весьма сложную форму. В самом деле, на каждом элементарном участке пути dx, работа dP будет пропорциональна квадрату той скорости, с которой элемент D движется относительно воды:

$$dP = \varphi(\alpha) \cdot \left[\frac{dx}{dt} - v\right]^2 dx \tag{33}$$

причем сам коэффициент пропорциональности $\varphi(\alpha)$ не будет постоянен, а будет зависеть от угла атаки α, характеризующего элемент D в каждом его положении на прямой MN.

Приняв во внимание, что $\frac{dx}{dt}$ выражается непосредственно левой частью формулы (29), можно представить условие (32) в расшифрованной форме:

где:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} \Phi \cdot dx \leqslant \int_{x_2}^{x_3} \Phi \cdot dx \\ &\Phi = \varphi(\alpha) \cdot \left[\frac{c}{1 + c\frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{y_1}{\mathfrak{R}}} - v\right]^2 \cdot \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Разумеется, об аналитической интеграции этих выражений говорить не приходится, графическое же решение задачи особого труда не представит и может быть произведено в каждом отдельном случае. В результате определится такое соотношение между скоростями c и v, при котором элемент формы D, скользящий вдоль прямой MN будет давать какую-то избыточную полезную работу (в случае знака неравенства), или, по крайней мере не будет давать избыточной вредной (при знаке равенства «34»),

Можно показать, что при значениях y_1, не слишком близких к величине A (амплитуды хвоста), подобное условие легко выполняется даже для сравнительно

небольших отношений скоростей $\frac{c}{v}$: во всяком случае, при таких величинах $\frac{c}{v}$, которые встречаются в действительности у рыб (подсчеты по фотографиям Грэя дают для трески $\frac{c}{v} = 1.49$, для макрели $\frac{c}{v} = 1.81$ и для акулы $\frac{c}{v} = 1.9$).

Напротив, при значениях y_1, весьма близких к A, условие (34) может и не удовлетвориться. В частности, оно, видимо, не удовлетворяется в отношении хвостового плавника макрели, элементы которого на участке $x_2 - x_1$ своего пути вдоль по соответствующей прямой MN, совершали бы избыточную отрицательную работу, если бы на сцену не вступил новый процесс, которого мы до сих пор не рассматривали.

Фиг. 6. (По Грэю)

Дело в том, что на киноснимках движущейся макрели, — хотя бы на тех, которые заимствованы из работы Грэя и воспроизведены на фиг. 6 — видно, что в некоторые моменты времени хвостовой плавник этой рыбы ложится плашмя, в той плоскости, в которой происходят колебания тела. Это значит, что в те моменты, когда хвостовой плавник особенно тормозил бы движение вперед, он выводится из строя и свободно рассекает воду, двигаясь в ней подобно тонкой пластинке, идущей ребром вперед. Поведение хвостового плавника здесь как две капли воды напоминает поведение лопаток весел, которые поворачиваются плашмя, когда их заносят назад и ставятся вертикально — в рабочей фазе гребли. Впрочем, нет оснований думать, что макрель активно поворачивает свой хвостовой плавник: значительно вероятнее, что в нужные моменты она расслабляет соответствующие мышцы, благодаря чему хвостовой плавник сам собой пассивно ложится в воде, под действием встречного потока.

Покончив на этом с анализом кинематики возрастающей волны, рассмотрим те силы и те моменты, которые действуют на активно-плывущую рыбу, в различных фазах колебания ее тела.

Разумеется, точное определение всех элементов внешней динамики совершенно невозможно, ибо при условии нарастания амплитуд от головы ко хвосту, и пограничные условия, и условия непрерывности для водной среды оказываются невероятно сложными. Однако, можно попытаться хотя бы составить грубое представление о силах взаимодействия между водой и рыбой, сквозь тело которой движется форма твердой волны.

С этой целью проделаем приближенные и отнюдь не строгие вычисления элементов внешней динамики рыбы, применительно к каждой из десяти фаз, изображенных на фиг. 2 и частично вновь воспроизведенных на сводном чертеже фиг. 7, на котором они тоже перенумерованы.[1]

Как и прежде, будем предполагать, что тело рыбы достаточно плоское, для того, чтобы можно было отождествлять движение хребта ее с движением краев тела. Следовательно, будем считать, что углы атаки во всех точках пограничной поверхности равны углам атаки, определяемым в каждой соответствующей точке кривых на фиг. 7. Здесь важно будет вспомнить, что масштаб поперечных колебаний на фиг. 2, а стало быть — и на фиг. 7 преувеличен, и притом в 1.6 раз, — если в частности исходить из реальных пропорций движущейся макрели. Вот почему, при подсчетах, все углы атаки, условно определенные по чертежу фиг. 7, были затем перечислены с расчетом на уменьшение тангенсов их в 1.6 раз.

Хотя, в действительности, каждый из элементов форм волны взаимодействует с водой не как индивидуальное тело, а лишь как часть общей формы, в силу необходимости, пришлось сделать заведомо-неверное допущение, предположив, что каждый такой элемент (D на фиг. 3) подвергается действию тех же сил, которые существовали бы при его изолированном движении.

Обозначим слагающую элементарной силы по оси x через ΔX а по оси y через ΔY.

Вспоминая рассуждения при выводе формулы (33), можно положить, что

$$\Delta X = \xi(\alpha) \cdot \left[\frac{dx}{dt} - v\right]^2 \Delta S \tag{35}$$

где через ΔS обозначена площадь элемента поверхности, а величина $\xi(\alpha)$, в отличие от $\varphi(\alpha)$ формулы (33), отнесена к единице поверхности.

Подобным же образом, для элементарной слагающей ΔY найдем:

$$\Delta Y = \eta(\alpha) \cdot \left[\frac{dx}{dt} - v\right]^2 \cdot \Delta S. \tag{36}$$

[1] Чтобы не затемнять чертежа фиг. 7, на нем вынесены только шесть фаз; недостающие легко вообразить, представив себе зеркальное изображение «2», «3», «4» и «5» (так же, как например, «6» — зеркальное изображение «1»).

Что касается самих величин $\xi(\alpha)$ и $\eta(\alpha)$, то, они, обычно, задаются так называемыми полярами Лилиенталя. В данном случае, для ориентировочных вычислений, можно воспользоваться хотя бы одной из таких поляр, приведенных в «Динамике самолета»[1] и найденных при продувании винтовой дужки, в аэродинамической трубе.

Для того, чтобы связать вычисления с каким-то конкретным объектом, я принял для размеров рыбы и для скоростей c и v числовые значения пропорцио-

Фиг. 7

нальные тем, с которыми имел дело Грэй при своих киносъемках макрели, воспроизведенных на фиг. 6. Именно, в основу расчетов были положены значения:

$$L = 20 \text{ см}; \quad c = 47 \text{ см/сек}; \quad v = 26 \text{ см/сек}.$$

Так как на фотографиях Грэя видна только горизонтальная проекция рыбы, то профиль сечения ее вертикальной плоскостью был заимствован из другого источника,[2] причем, разумеется, все размеры были приведены к принятой длине L.

Суммируя все элементарные величины ΔX, вычисленные для каждой из десяти фаз, я получил значения полной силы X, толкающей рыбу вперед, в соответствующий момент времени. На фиг. 8 кривая X изображает найденный закон изменения движущей силы X, в течение одного периода (по оси

[1] В. П. Ветчинкин. Динамика самолета, изд. 1938 г., стр. 48.

[2] П. Ю. Шмидт. Жизнь русских морей, стр. 620, рис. 307 (в книге Келлера «Жизнь моря», часть V).

абсцисс проставлены номера фаз, соответствующие фиг. 2 и 7). На диаграмме, за единицу принята средняя за период величина этой силы.

Как видим, движущая сила X меняется в довольно широких пределах, достигая значения 1.5 и падая до 0.5. Первое из них, наибольшее за период, соответствует положению волны, промежуточному между III-й и IV-й фазой и промежуточному между 8-й и 9-й, когда хвостовой плавник движется примерно вдоль оси x (см. фиг. 2 и 7). Напротив, самыми невыгодными в смысле полезного действия оказываются положения, соответствующие примерно V-й и X-й фазам — т.-е. положения, при которых хвост рыбы подходит к своим крайним отклонениям от оси x.

Как и должно быть, при кинематических условиях, рассмотренных в предыдущем параграфе, — сила X в течение всего периода T остается положительной.

Аналогичным способом суммирования элементарных сил ΔY, был определен закон изменения поперечной силы Y, стремящейся сдвинуть то вправо, то влево тело рыбы, во время ее активного движения вперед. На фиг. 8, кривая Y изображает этот закон изменения, причем масштаб сил сохранен прежним (за единицу принята средняя величина X за период).

Диаграмма (фиг. 8—Y) показывает, что поперечная сила достигает весьма большой величины: — 1.0, причем, разумеется, протекание кривой по обе стороны от оси абсцисс вполне симметрично относительно последней. Положительные ординаты на диаграмме Y соответствуют поперечным силам, стремящимся сместить тело рыбы вправо от курса, отрицательные — силам противоположного направления.

С точки зрения величины паразитных поперечных сил Y, рыба оказывается в самом невыгодном положении в фазах I-й и VI-й, когда эти силы достигают наибольших величин. Напротив, близ III-й и VIII-й фаз, поперечная сила Y обращается в нуль.

Рассмотрим теперь моменты действующих сил, стремящиеся повернуть движущуюся рыбу вокруг вертикальной оси.

В каждом из положений, представленных на фиг. 2 и 7, вращающие моменты слагаются из двух частей; первая из них обусловлена тем обстоятельством, что элементарные силы ΔX, о которых была речь выше, приложены все на различных расстояниях от оси абсцисс. Поэтому, каждая из них дает элементарный момент, равный

$$\Delta M_z = -\Delta X \cdot y. \tag{37}$$

Знак минус стоит в правой части потому, что мы условимся считать положительным момент, стремящийся повернуть голову рыбы вправо от курса, а хвост — влево (величину y, разумеется, надо брать с соответствую-

щим знаком, принятым на диаграмме фиг. 7, а силу x приходится считать положительной в направлении отрицательного x).

Вторая компонента вращающего момента возникает благодаря тому, что при каждом положении твердой волны элементарные силы ΔY образуют пары. Чтобы учесть эти пары, достаточно просто взять моменты всех элементарных сил относительно переднего конца головы.

То есть, моменты:

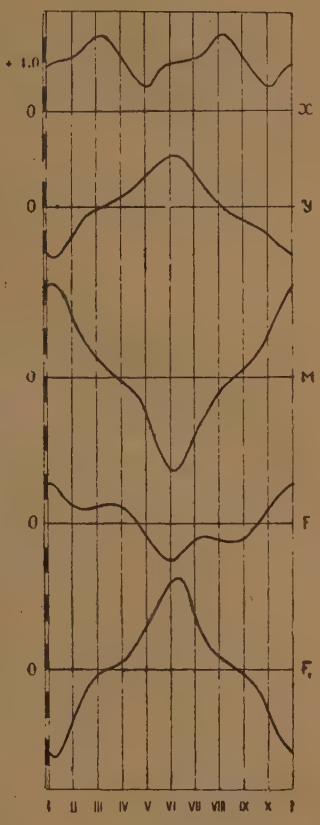
$$\Delta M_y = -\Delta Y \cdot x. \qquad (38)$$

Здесь знак в правой части поставлен с учетом того же условия, касающегося направления вращения.

На основании (37) и (38), можно написать выражение для полного вращающего момента M:

$$-M = \sum \Delta X \cdot y + \sum \Delta Y \cdot x. \qquad (39)$$

Вычисления, произведенные по формуле (39), привели к зависимости, изображенной кривою M на фиг. 8 (моменты выражены в единицах, равных произведению принятой единицы силы на один сантиметр).



Фиг. 8

Подобно силам Y, полные вращающие моменты достигают наибольших величин в положениях, соответствующих фазам «I» и «VI». Напротив, примерно в фазах «IV» и «IX» вращающие моменты отсутствуют.

Чрезвычайно интересно рассмотреть совместное действие вращающих моментов и поперечных сил. Для подобного исследования можно приблизительно наметить точки приложения равнодействующих сил, возникающих в качестве реакций на вращающий момент. При этом, очевидно, можно исходить из представления о «возможных перемещениях», вызываемых моментом. Для простоты предполагалось, что «возможное» вращение происходит вокруг вертикальной оси, пересекающей ось рыбы в средине ее и что тело рыбы в вертикальном направлении обладает повсюду одними и теми же размерами (таким образом, линейное перемещение везде оказывалось прямо пропорциональным расстоянию от средины тела рыбы).

На схематической фиг. 9 эти точки приложения обозначены римскими цифрами I и II. Если расстояние между ними равно h, то, очевидно, каждая

из сил, которые надо приложить для создания момента M, должна равняться $\frac{M}{h}$. На той же схеме (фиг. 9) изображена сила Y, которую, по упомянутым соображениям, будем условно считать приложенной в средине продольной оси рыбы.

Заменим теперь силу Y двумя равными между собою силами $\frac{Y}{2}$, приложенными в точках I и II. В результате, получим, полные поперечные силы F_1 и F_2, действующие на голову рыбы и на ее хвост.

При этом, для направлений, изображенных на фиг. 9, будут:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{M}{h} - \frac{Y}{2} \\ F_2 &= \frac{M}{h} + \frac{Y}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Определив h и пользуясь диаграммами (фиг. 8-Y и 8-M), я вычислил по формуле (40) полные поперечные силы, причем получился закон изменения их, изображенный на фиг. 8-F_1 и 8-F_2.

Как видим, на голову рыбы действуют сравнительно небольшие поперечные силы F_1, которые даже в самые невыгодные моменты (фазы «I» и «VI») достигают всего лишь 0.8 принятых условных единиц.

Напротив, на хвостовую часть тела рыбы действуют весьма большие поперечные силы F_2, доходящие до 1.95, т. е. до величины, которая на 30% превышает максимальную движущую силу. Только в моменты, промежуточные между «III» и «IV», а также — между «VIII» и «IX» фазами, поперечная сила F_2 делается равной нулю. Эти два момента за период T являются вообще самыми благоприятными для движения рыбы, как нетрудно видеть, сопоставляя между собою все диаграммы, приведенные на фиг. 8: здесь рыба развивает наибольшую движущую силу X и, в то же самое время, поперечная сила F_2 обращается в нуль.

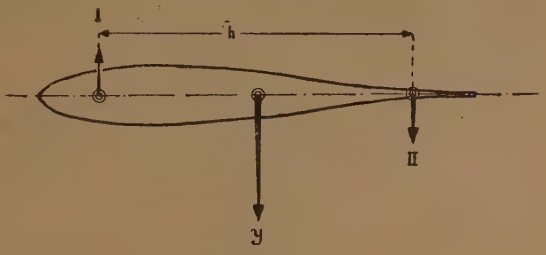
Легко видеть, что паразитные силы F_1 и особенно F_2, являются крайне вредными: они вызывают вибрации корпуса рыбы вправо и влево от курса («рысканье») и несомненно приводят к довольно значительным потерям энергии на вихреобразование.

Насколько интенсивно идет подобное вихреобразование, можно судить хотя бы по фотографии Грэя, воспроизведенной на фиг. 6: темные полосы, ясно заметные сбоку и позади тела макрели, достаточно убедительно свидетельствуют о свилях, вызванных вихрями в воде.

Это — чрезвычайно важное обстоятельство, которое, обычно совершенно не учитывается при исследовании гидродинамических качеств рыбы: как бы ни были совершенны обводы ее корпуса, как бы хорошо этот корпус ни обтекался струями воды, — преимущества, которые такая «хорошо обтекаемая» рыба имеет

перед «плохо обтекаемой» змееви́дной рыбой, будут сильно обесценены благодаря наличию поперечных паразитных сил (отсутствующих при движении змееви́дного типа).

Вот вероятно почему, из всех рыб, кинематограммы которых имеются в статье Грэя, наибольшее значение величины $\frac{vT}{L}$ (именно, — значение $\frac{vT}{L} = 0.57$) обнаружилось именно у скромного у́гря, длинный корпус которого далеко не отличается таким совершенством, в отношении обтекаемости, как например корпус быстроходной ма́крели («быстроходность» ее достигается отнюдь не за счет большой величины $\frac{vT}{L}$, которую с полным правом можно назвать приведе́нным ша́гом рыбы, а исключительно за счет большой ча́стоты колебаний $\frac{1}{T}$).



Фиг. 9

§ 4. Кинематика мышечных сокращений

Если, в будущем, элементы внешней динамики рыбы будут уточнены путем более строгих гидродинамических исследований, то, во всяком случае останутся в полной силе те элементы внешней кинема́тики, которые были рассмотрены в предыдущих параграфах. Попытаемся же продолжить цепь геометрического анализа и на те движения, которые происходят вну́три тела рыбы, при распространении по нему твердой возрастающей волны. Этот геометрический анализ, в данном случае, представляет очень большой интерес уже в том отношении, что процесс работы мышц рыбы (равно как и мышц змеи) дает пожалуй единственный в природе пример необычайно простого гармонического колебательного движения, ничем не замаскированного.

В самом деле, ведь все те изменения формы, все те изгибы, которые представлены хотя бы на фиг. 2, возникают исключительно благодаря ритмическим сокраще́ниям продольных мышц рыбы и последующим расслаблениям этих мышц (в те фазы колебаний, когда сокращаются мышцы другой стороны). В то же время легко показать, что сам закон мышечных сокращений может быть весьма просто получен, путем исследования геометрических элементов возрастающей волны.

Допустим, что в некоторый момент времени один из участков тела рыбы принял форму, изображенную на фиг. 10 (в плане), на которой вектор c изобра-

жает направление движения всей волны (следовательно, сама рыба движется относительно воды в направлении, прямо противоположном). Совершенно очевидно, что подобная форма исследуемого участка возникла под влиянием сокращения мышц левой стороны тела рыбы, сопутствуемого расслаблением мышц правой стороны. Допустим, что в спрямленном состоянии и правая и левая граница вырезанного участка обладают длиной s, т. е. той длиной, которая неизменно соответствует вырезанной части позвоночника (она отмечена на фиг. 10). Попытаемся определить, как меняются, во времени, приращения $\pm\Delta s$ этой длины s.

Пусть точка O изображает центр, а вектор ρ — радиус кривизны вырезанного участка позвоночника. Тогда, как легко видеть, длина правой границы тела $s+\Delta s$, длина позвоночника s и длина левой границы $s-\Delta s$ будут связаны весьма простым соотношением с радиусом кривизны ρ и половиной «b» толщины тела рыбы. Именно:

$$\frac{s\pm\Delta s}{s}=\frac{\rho\pm b}{\rho}$$

откуда:

$$\sigma=\frac{\Delta s}{s}=\frac{b}{\rho} \tag{41}$$

Но, как известно, сам радиус кривизны ρ связан с первой и второй производными от y по x (где y и x сохраняют прежний смысл). Именно:

$$\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}. \tag{42}$$

При обычных значениях амплитуд колебаний в теле рыбы, величина квадрата первой производной может считаться всегда весьма малой по сравнению с единицей. Следовательно, в дальнейшем можно будет вместо формулы (42) применять более простую, вытекающую из нее при указанном допущении:

$$\frac{1}{\rho}\cong\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{43}$$

По той же причине, при вычислении самой второй производной $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, по основному уравнению возрастающей волны (9), можно будет ограничиться лишь одним членом и полагать, что:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-a\left[\beta^2+\left(\frac{\gamma}{c}\right)^2\right]e^{\beta x}\cdot\sin\gamma\left(t+\frac{x}{c}\right). \tag{44}$$

Полученные соотношения (41), (43) и (44) позволяют найти закон изменения сокращения мышцы σ во времени. Прежде чем написать его в готовом виде,

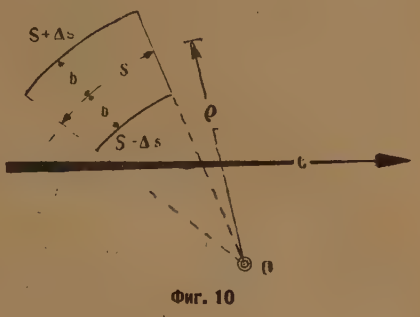
можно будет внести в (44) некоторые преобразования, вспоминая что β и $\frac{\gamma}{c}$ выражаются через длину волны λ и инкремент нарастания δ и обозначая попрежнему амплитуду поперечных колебаний тела рыбы, на данном участке через $\mathfrak{A}$

$$(\mathfrak{A} = a \cdot e^{\beta x}). \qquad (26)$$

Тогда, в результате, окажется, что относительное сокращение мышцы σ:

$$\sigma = \frac{\mathfrak{A} \cdot b}{\lambda^2}(4\pi^2 + \delta^2) \cdot \sin\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right). \qquad (45)$$

Как видим, оно меняется по тому же простому гармоническому закону, по которому изменяются поперечные отклонения тела от первоначальной оси. Наибольшее сокращение мышцы будет происходить в те моменты, когда соответствующий элемент тела рыбы будет наиболее удален от первоначальной осевой линии. Сама величина наибольшего относительного сокращения, по уравнению (45) определится так:



Фиг. 10

$$\sigma_{max} = \frac{\mathfrak{A} \cdot b}{\lambda^2}(4\pi^2 + \delta^2). \qquad (46)$$

До сих пор предполагалось, что сокращающаяся мышца проходит как раз вблизи правой или левой границы тела. Но легко видеть, что те же соотношения (45) и (46) дадут закон сокращения любой внутренней продольной мышцы, если только вместо половины толщины тела мы будем под b подразумевать расстояние соответствующего мышечного волокна от средины позвоночника.

Следует отметить, что при существующих величинах сокращений, величина σ, а стало быть и σ_{max} практически не зависят от того, расположена ли мышца параллельно оси или же входит в состав какой-либо косой системы, находящейся на том же расстоянии от позвоночника: в этом легко убедиться, рассмотрев соответствующие приблизительно пропорциональные отрезки прямых.

На фиг. 11 соответствующая кривая выражает наибольшее сокращение σ_{max}, имеющее место на том или ином участке тела рыбы (вычислено на основании формулы 46). Для наглядности, на том же рисунке изображены также величины амплитуд поперечных колебаний соответствующих участков тела (величины $\mathfrak{A}$) и, кроме того, в плане представлена форма тела рыбы. В данном случае, масштаб амплитуд поперечных колебаний — тот же, как масштаб продольных измерений (а не преувеличен, как на фиг. 2).

Как видим, наибольшие сокращения мышц соответствуют расстоянию от переднего конца, равному 0.7 всей длины корпуса: здесь относительное сокращение достигает почти 0.15 (т. е. каждый сантиметр мышечного волокна сокращается на 1.5 мм), при условии, что волокно проходит близ кожного покрова и что амплитуда колебаний хвоста составляет $\frac{1}{4}$ от длины корпуса ($a \cdot e^{\beta L} = 5$ см). Сокращения внутренних волокон будут, разумеется, тем меньше, чем ближе они отстоят от позвоночника, причем закон убывания будет, как легко видеть, — линейный. Как увидим в следующем разделе, в задаче динамики мышечных сокращений (в задаче о вычислении работы мышц) расстояние волокна от позвоночника автоматически элиминируется, а это, разумеется, сильно облегчает теоретическое исследование процесса.

§ 5. Динамика мышечных сокращений. Вычисление работы и коэффициента полезного действия движителя рыбы

Формула (45), выведенная в предыдущем разделе, позволяет вычислить величину относительного сокращения мышц в любой момент времени. Но ведь зная этот закон мышечных сокращений можно попытаться определить работу, которую производят мышцы в той или иной части движителя рыбы: для этого нужно будет для каждого элемента времени найти произведение элементарного смещения на величину силы, действующей вдоль по волокнам в рассматриваемый момент времени; затем найденная элементарная работа должна быть проинтегрирована в пределах от нуля до T (где T попрежнему обозначает период колебаний), причем получится работа за период, отнесенная к единице длины тела рыбы (ибо смещение рассматривалось именно применительно к единице длины: сокращение Δs относилось к самой длине s на фиг. 10).

Попытаемся же определить величину работы мышц, найдя сперва общее выражение для нее.

Прежде всего, как только что было сказано, элементарная работа dP_1, на единице длины, за элементарный промежуток времени dt должна равняться:

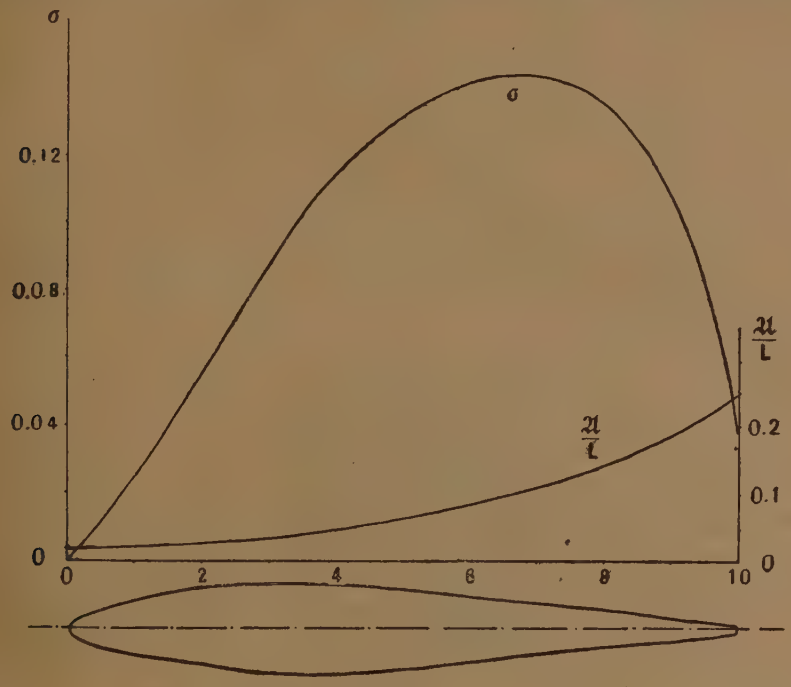
$$dP_1 = F \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} \cdot dt. \tag{47}$$

где F выражает силу, действующую на мышцы, а $\frac{\partial \sigma}{\partial t} \cdot dt$ — перемещение ее точки приложения. Что касается последней величины, то она может быть непосредственно определена путем дифференцирования функции (45). Напротив, величину F, для каждого момента времени найти не так просто. Легко обнаружить только, что сила F равняется частному от деления изгибающего мо-

мента M', в данном сечении тела, на плечо b, о котором была речь в предыдущем разделе (b представляет собою расстояние мышц от позвоночника). То есть:

$$F=\frac{M'}{b}. \qquad (48)$$

Сама же величина изгибающего момента M' могла бы быть точно вычисленной лишь в том случае, если бы была вполне строго разрешена задача о воз-



Фиг. 11

действии воды на сложноизогнутое тело рыбы. Но в одном из предыдущих разделов указывалось уже, что современная гидродинамика не научилась еще разрешать подобных задач, а потому для наших целей — целей гидробиофизических — пришлось прибегнуть к приближенному методу, правда, получившему права гражданства в современной технике воздушных кораблей. Воспользовавшись этим методом — разбив все тело рыбы на элементарные участки и применив к каждому из них, в отдельности, поляру Лилиенталя, оказалось возможным приблизительно вычислить силу, движущую рыбу, силу, вызывающую «дрейф» (перпендикулярно к направлению движения), а также — момент силы, заставляющий тело рыбы колебаться вокруг вертикальной оси (причем голова и хвост отклоняются всегда в противоположные стороны, на подобие «рысканья» корабля) (фиг. 8).

Здесь придется снова прибегнуть к тому же приближенному методу, не дожидаясь того счастливого времени, когда станет возможным найти вполне строгое гидродинамическое решение.

Итак, основываясь на законченных и точных кинематических представлениях предыдущего раздела, мы можем попытаться приближенно исследовать динамику мышечных сокращений.

Для этого подставим в (47) выражение частной производной на основании (45), а также — выражение силы из (48). Тогда получим:

$$dP_1 = \frac{\mathfrak{A} \cdot M'}{\lambda^2} \cdot \gamma \cdot (4\pi^2 + \delta^2) \cdot \cos\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right) \cdot dt. \tag{49}$$

Как видим, величина b, входившая в выражения σ и F, здесь элиминировалась. Следовательно, для вычисления работы, в сущности, не надо знать, на каком расстоянии от позвоночника проходят наиболее деятельные мышечные волокна — анализ может быть проделан в самой общей форме, независимо от анатомических особенностей рыбы.

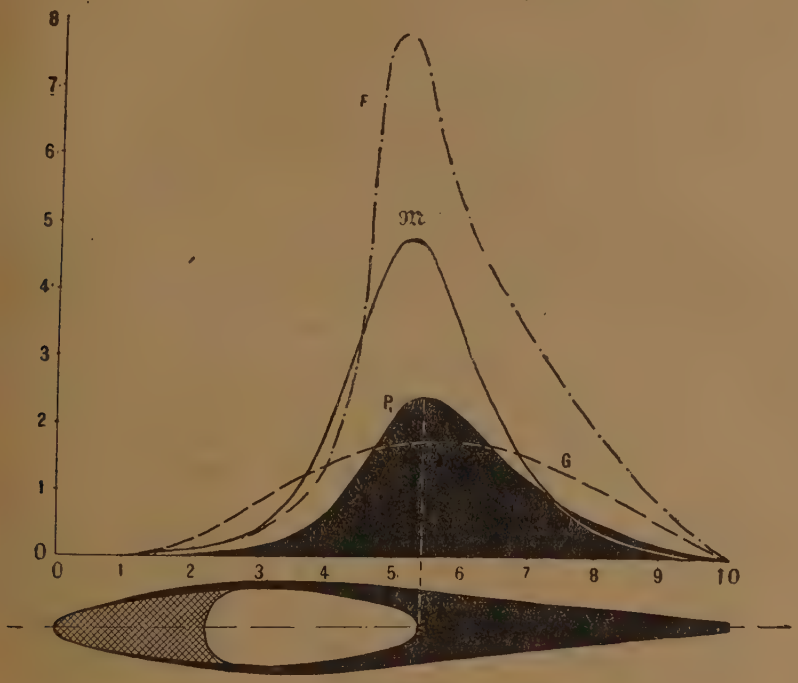
Для вычисления изгибающего момента M', тело рыбы придется рассматривать как балку, нагруженную динамическими силами, о которых говорилось в § 3, и одновременно — находящуюся под действием реакционных «опорных» сил. Приэтом, последние силы могут быть определены с достаточной надежностью, из рассмотрения возможных перемещений тела рыбы, под действием дрейфующей силы Y и момента M (фиг. 8), вызывающего «рысканье». Вычисления — несложные принципиально, но весьма кропотливые, — приводят к зависимости между изгибающим моментом M' и аргументами x и t, которая, к сожалению, не может быть выражена одной аналитической функцией. Пренебрегая небольшими обертональными колебаниями, можно положить только, что изгибающий момент M' представляет собою следующую функцию:

$$M' = \mathfrak{M} \cdot \cos\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right). \tag{50}$$

Здесь величина $\mathfrak{M}$, которую, по аналогии, назовем амплитудой моментов, — не выражается никакой аналитической функцией, а потому она представлена на фиг. 12 графически (кривой, помеченной той же буквой $\mathfrak{M}$).

Следует отметить, что при вычислении моментов, за единицу силы принималась, как и выше, средняя сила, вызывающая поступательное движение рыбы (см. фиг. 8). Стало быть, если путем эксперимента удастся более или менее точно определить эту силу, то для получения абсолютной величины момента останется только помножить все значения ординат кривой $\mathfrak{M}$ (фиг. 12) на соответствующий переходный множитель.

Исходя из закона изменения $\mathfrak{M}$ по длине тела, любопытно вычислить примерные величины сил, действующих вдоль мышц, в различных частях тела рыбы. Для этого в уравнение (48) надо подставить вместо b приблизительно две трети расстояния от позвоночника до эпителия в данной части тела, а также — заменить M' через $\mathfrak{M}$, если мы хотим судить о максимальных значениях сил.



Фиг. 12

Результат подобных вычислений представлен на том же рисунке (фиг. 12) кривой, отмеченной буквой F_{max}. Как видим, наибольшая сила, действующая вдоль мышц, может примерно в семь с половиною раз превышать среднюю силу, перемещающую рыбу в воде вперед (ту, которая была принята за единицу).

Соотношения (49) и (50) и кривая $\mathfrak{M}$ фиг. 12 позволяют определить величину работы, совершаемой единицей длины тела рыбы за один период T. В самом деле, на основании обоих упомянутых соотношений:

$$dP_1 = \frac{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{M}}{\lambda^2} \cdot \gamma (4\pi^2 + \delta^2) \cdot \cos^2 \gamma \left(t + \frac{x}{c} \right) dt, \qquad (51)$$

откуда, выполняя интеграцию по времени, за период, легко найти:

$$P_1 = \pi \cdot \frac{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{M}}{\lambda^2} (4\pi^2 + \delta^2). \qquad (52)$$

Результаты вычислений по этой формуле изображены на фиг. 12 в виде кривой P_1, ординаты которой представляют величину работы, приходящейся (за один период) на долю каждого погонного сантиметра тела рыбы в разных частях его. Попрежнему, при вычислениях, за единицу силы была принята средняя движущая сила ($X_{ср}$) за период. Для получения абсолютной величины работы следует все величины помножить на тот же переходный коэффициент, о котором говорилось выше, в связи с определением сил F.

Как видно на фиг. 12, распределение работы между различными частями тела рыбы далеко неравномерное: весьма резко выраженный максимум наблюдается на расстоянии около 0.55 всей длины от переднего конца головы. Как же соответствует этому положению максимума то распределение мышечных масс, которое в действительности имеет место у рыбы?

Для того, чтобы ответить на этот вопрос, был подвергнут специальному исследованию один экземпляр макрели (*Scomber scombrus*), любезно предоставленный из коллекций ВНИРО Н. И. Монастырским. Длина его была равна 32 см, а все остальные размеры соответствовали тем же пропорциям, которые принимались выше, при вычислениях, применительно именно к макрели. Поэтому, для приведения этих размеров к масштабу диаграмм, оставалось только сделать простой пропорциональный пересчет.

Тело макрели было разрезано в горизонтальной плоскости на две примерно равновеликих части: спинную и брюшную. На фиг. 12 изображена, под диаграммой, в схематическом виде, брюшная часть, рассматриваемая в плане. Штриховкой в клетку обозначены части, связанные с черепом и не принимающие никакого участия в работе движителя. Совсем не заштрихованы и не залиты тушью те части, где располагаются внутренние органы рыбы; наконец, черной тушью залиты участки, занятые мышцами. Как видно на схеме, максимум кривой P_1 приходится как раз над тем местом в теле рыбы, где все сечение оказывается занято мышцами (и только отчасти — соединительной тканью).

Что касается спинной половины тела, то там распределение мышц не так резко обособлено, но и там тенденции — те же. Любопытно отметить, что уменьшение массы мышц к концам тела, изображенное на схематическом разрезе фиг. 12, идет значительно резче по направлению к голове, чем по направлению к хвосту. Но ведь совершенно так же обстоит дело и с уменьшением ординат кривых P_1, $\mathfrak{M}$ и F. Совпадение картин здесь поразительно полное.

Для того, чтобы получить хотя бы грубое количественное (а не только качественное) сопоставление, обе части тела макрели (и спинная и брюшная) были разрезаны на 10 частей (каждая) и все полученные отрезки взвешены по отдельности (не высушивая их). Разумеется, предварительно были удалены все внутренние органы а также — череп. Вес каждых двух соответственных отсеков (спинного и брюшного) выражался в процентах, и полученные величины на-

носились на ординаты кривой G, изображенной на том же рисунке (фиг. 12) (координаты брались в средине каждого отсека). Как видим, максимум кривой G в точности совпадает с максимумом работы, приходящейся на соответствующий отсек, т. е. мышечный материал чрезвычайно рационально распределен в теле рыбы.

Есть основания полагать, что при более детальном анатомическом исследовании, когда будут отдельно отпрепарированы одни лишь мышцы, вызывающие изгибы тела (будут удалены все прочие мышцы, кости и соединительная ткань), то совпадут не только положения максимумов кривых G и P_1, но и сама форма кривой G приблизится к форме кривой P_1. Подобные детальные исследования намечены на Черноморской гидрофизической станции (в Кацивели), применительно к различным типам рыб.

Как указывалось выше, ординаты кривой P_1 выражают величину работы, которая совершается за один период мышцами, заключающимися в теле рыбы на протяжении одного сантиметра. Совершенно очевидно, следовательно, что вся площадь кривой P_1, покрытая черной тушью, выражает собою полную работу P, совершаемую за один период всем движителем рыбы. Но лишь часть этой работы идет на перемещение рыбы в направлении ее движения: кроме этой, полезной, части работы, существует еще довольно значительная вредная работа, идущая на образование вихрей, вызываемых дрейфом и рысканьем рыбы.

Нетрудно видеть, что полезная работа рыбы за один период весьма просто выражается через шаг рыбы. Именно: так как за единицу силы принята средняя сила X, то:

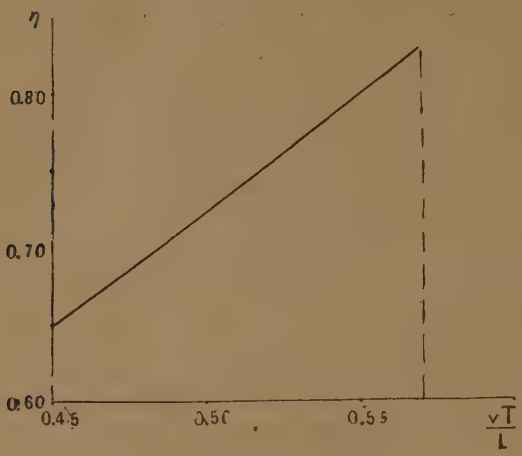
$$P_{\text{полезн.}} = vT \cdot X_{ср} = vT. \tag{53}$$

Определяя величину площади кривой P_1 на фиг. 12 и помножая ее на соответствующий переходный коэффициент, мы можем найти величину полной работы P, а затем, пользуясь величиной $P_{\text{полезн.}}$ вычисленной по формуле (53), определить коэффициент η полезного действия движителя рыбы:

$$= \frac{P_{\text{полезн.}}}{P}. \tag{54}$$

Если предположить, что величина шага не связана с величиной потерь на вредные поперечные движения, то можно, пользуясь тем же приемом, определить значение коэффициента полезного действия для случаев той же полезной работы, но различных значений шага vT. Результаты таких подсчетов изображены на диаграмме фиг. 13, на которой, для общности, по оси абсцисс отложены не значения шага vT, а значения приведенного шага $\frac{vT}{L}$, в тех пределах, кото-

рые обычно наблюдаются у рыб. Как видим, при изменении приведенного шага в пределах между 0.45 и 0.57, коэффициент полезного действия движителя рыбы меняется в пределах от 0.65 до 0.83. Любопытно отметить, что коэффициент полезного действия корабельного винта не превышает 0.75.



Фиг. 13

Следует отметить также, что наибольшая величина приведенного шага (0.57) присуща угрю, у которого, благодаря сравнительно небольшому различию амплитуд колебаний головы и хвоста, дрейфовые движения и рысканье менее всего сказываются и у которого, по этой причине, должны быть наименьшие потери, связанные с указанными вредными движениями. Стало быть, строго говоря, полная работа здесь должна быть меньше той величины, которая была, при всех прочих равных условиях, найдена выше, а потому — и коэффициент полезнего действия движителя, по всей вероятности, должен превысить формально найденную величину 0.83.

Итак, мы еще раз убеждаемся в том, что хорошая обтекаемость тела рыбы и хороший коэффициент полезного действия ее движителя — взаимно противоречат: наиболее совершенная, с точки зрения обтекаемости, форма тела характерна для таких рыб, как макрель а потому для продвижения их вперед, при всех прочих равных условиях, требуется наименьшая сила X. Но, с другой стороны, коэффициент полезного действия такого типа рыб оказывается наименьшим. Напротив, форма угря чрезвычайно несовершенна в смысле обтекаемости, — зато коэффициент полезного действия движителя этой рыбы — наибольший из всех возможных.

Черноморская
Гидрофизическая станция.
Весна 1934.

WAS. SHOULEJKIN. EXTERNAL AND INTERNAL DYNAMICS OF THE FISH

SUMMARY

1. The movement of all the species of fish is due to the repulsive effect of a solid wave propagating along their body (by some species along fins of a special shape). As a rule the fins serve only for slow movements and stabilisation (and by the flying fish as supporting planes in flight).

2. The solid waves propagated along the body of afish may be divided in two groups:

a) waves with constant amplitudes from head to tail,

b) those with an amplitude increasing with the progress of the wave from the head to the tail.

The wave of transversal oscillations, running along the body of an eel, approaches that of the first type but even in this case the transverse oscillations of the head have a scarcely smaller amplitude than those of the tail.

The second type of oscillation is peculiar to the considerable majority of fishes, the shape of which is quite different to that of the eel.

3. The repulsion of a fish is owed to the fact that the propagation velocity of the wave c exceeds the velocity v of the progressive motion of the body in the water.

4. In the case of a wave with a constant amplitude the power of repulsion may be considered as equal to $B(c-v)^2$, where B is the ratio coefficient, experimentally determined. When the motion is stationary, this power exactly balances the resistance force of a water medium to the movements of an eel (the resistance force being equal to bv^2). Here the ratio coefficient «b» corresponds not to the wave-shaped solid, dragged through a liquid (like the coefficient B), but to a straightened one.

5. The ratio of a constant amplitude wave velocity to the progressive motion velocity of a fish in water may be determined with a formula:

$$\frac{c}{v}=1+\sqrt{\frac{b}{B}}.$$

6. In the case of unequal amplitudes of transversal oscillations in the different parts of a fish body, these oscillations are expressed by the equation of the increasing wave:

$$y=a\cdot e^{\beta x}\cdot\sin\gamma\left(t+\frac{x}{c}\right)$$

where a is the amplitude of transverse oscillations of the head, x — the distance from the front edge of the head along the body, β — a factor, characterising the wave growth velocity, t — the current time and γ is connected to the oscillation period T with the ratio:

$$\gamma=\frac{2\pi}{T}.$$

7. In such a case of the increasing wave, propagated along the fish body, the cynematic conditions become complicated. First of all it proves that at some moments some parts of the fish body inevitably move in the direction of the general motion. To lessen as possible this resisting effect it is necessary that the wave velocity

satisfies a condition exactly expressed only in a very complicated form. Roughly it can be written as follows:

$$\frac{c}{v} = 1 + \frac{\delta}{2\pi}$$

where δ denotes the logarithmic increment of wave growth, i. e. the value $\delta = \beta \cdot \lambda$ (where in its turn λ is the wave length, or its progress along the body during the period T).

8. The above cynematic conditions lead to the fact that a «step» peculiar to every fish is to be found: it is the way a fish can advance on in the water during one period T.

9. As it proves, the value of the step X is connected to the wave length λ and the factor β by the approximate ratio:

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{\lambda} + \frac{\beta}{2\pi}.$$

10. To lessen the same resisting effect of the movements of some muscles, some fish (good swimmers) simply switch out the part of the prime mover the work of which could be particularly harmful. They put flat the tail fin, as it can be seen in the case of the mackerel on Gray's cynematograms (fig. 6).

11. A good characteristics of the movement of fish represents the reduced step, equal to a quotient of the way passed in a period (vT) by the body length (L). For the majority of fishes this reduced step $\left(\frac{vT}{L}\right)$ lies within the limits from 0.45 to 0.57; the last higher figure belongs to the eel.

12. Modern hydrodynamics cannot give an accurate expression of the forces exercised by water on the curving body of a fish, deformed by a increasing wave. However, we may obtain the approximate values of all dynamic forces, by dividing the body into elements and applying to each of them the Liliental's polar diagram. All the elements of external dynamics are summed up on fig. 8. In particular the curve «X» represents the changes of the force X, propulsing the fish forward (in a period). This efficient force varies from 0.5 to 1.5 of a certain mean value, taken further as a forces measurement unit.

13. On the same fig. 8 the curve Y represents the change of the harmful force, acting upon the fish body normally to the direction of the motion. It can reach the value taken for a unit.

14. On fig. 8 the curve M represents the changes of the harmful rotatory moment, causing the launching of a fish (the swerve of the head to the right and the left from the course).

The curves F_1 and F_2 of the same figure give a conception of the resulting harmful forces pushing the head and the tail rightwards and leftwards. At the most disadvantageous moments the obnoxious forces effecting the tail exceeds the force unit by 100% and the highest motive force by 25%.

16. The most efficient work of the prime mover takes place in the phases lying between the phases III and IV in fig. 2, and between the phases VIII and IX represented on the same figure. It is easy to see that in both those positions the tail fin is «sweeping» along the axis of the motion.

17. On the contrary the moments corresponding the phases I and VI of the figure prove to be the most disadvantageous of all.

18. The above mentioned harmful forces cause the rise of vortexes around the body of a drifting and launching fish. Traces of the alike vortexes are seen in fig. 6, reproducing Gray's cynematograms (for the mackerel).

19. Having remarked the connection between the radius of curvature of the waving fish body and the muscular contraction, it is easy to proceed from the external cynematics and dynamics to the internal ones. Taking into consideration this connection and applying the equation of the increasing wave, one can show that the muscular contraction follows the same simple harmonic law as the transverse oscillations of the body elements. The greatest relative contraction (in the period T) of a length unit of a muscle proves to equal:

$$\sigma_{\max} = \frac{\mathfrak{A} \cdot b}{\lambda^2}(4\pi^2 + \delta^2),$$

where $\mathfrak{A}$ is the amplitude of transverse oscillations in a given point of the body (i. e. $\mathfrak{A} = a \cdot e^{\beta x}$), b is the distance from the muscular fibril to the spine, and λ and δ reserve the previous meaning. Figure 11 represents the values of the maximum contractions of the peripheral muscles in different parts of the body.

20. The above mentioned law of muscular contraction may be considered as completily exact. On the contrary, the forces acting along the muscles can be now calculated rather approximately. For their determination it is necessary to consider the fish body as a beam laden with external dynamical forces, taking into account the support reactions (determined by method of virtual displacements). Then the values of flexing moment for every section of the fish will be determined. Calculations have shown that this moment may be roughly expressed by the formula:

$$M' = \mathfrak{M} \cdot \cos\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right),$$

where the «amplitude of moment» $\mathfrak{M}$ can be expressed with no analytic function. But it can be shown graphically for every section in fig. 12 (curve $\mathfrak{M}$).

21. The force acting along the muscles is equal to the quotient of the flexing moment M' by the distance from the spine axis to the point of application of the resultant of all muscular powers in the given section. The value of the muscle tension powers, calculated for all the sections is represented graphically on fig. 12 (curve F).

22. The work of a muscle on body length unit is expressed by an integral of the whole period from the products of tension along the muscles multiplied by the value of the elementary muscular contraction. It is remarkable that the distance between the spine axis and the muscle fibril is automatically eliminated, which makes it possible to draw the conclusion in a perfectly general form, for any distribution of working muscles. The amount of work on a linear centimeter of the body during one period is determined by the formula:

$$P_1 = \pi \frac{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{M}}{\lambda^2}(4\pi^2 + \delta^2).$$

The results of the calculations are given in fig. 12 (curve P_1)

23. Under the diagram a shematic section of a mackerel by a horizontal plane is given: the separated abdominal part, viewed from above. As it is shown in fig. 12, the maximum work corresponds to the part of the body where the muscle mass is especially large. At the edges of the body the amount of work effected on a length unit of the corresponding section decreases together with the muscle mass diminution.

24. For an approximate amount comparison of the work P_1 and the muscular mass in either section of the body, several sections have been weighed. The results are represented in fig. 12 (curve G). The ordinates of this curve denote the per cent weight of the muscles in one tenth of the body length in the corresponding part of the body. A perfect coincidence of the maximum points of both curves P_1 and G is observed; this fact proves that the muscles in a fish body are distributed very efficiently.

25. The area of the curve P_1 in fig. 12 represents on a conditional scale the full work P, performed by all the active muscles of a fish during one period. During the same lapse of time, the fish performs the efficient work equal to the product of the mean motive power X_m by the step (vT). The quotient of the efficient work by the full one represents the efficiency of the prime mover of the fish. In fig. 13 the values of the efficiency for any meanings of the reduced step $\left(\frac{vT}{L}\right)$ are given. For the changes of the latter within the limits corresponding to the existing types of fish, the efficiency varies from 0.65 to 0.83. There are reasons to suppose that for the eel this value can even exceed the top limit.

26. A condition of shape convenient for flowing round of the fish and high efficiency contradict one another. The best shape is peculiar to the fish having lower efficiency, and, on the contrary, the eel with its inconvenient shape operates as prime mover most efficiently.

27. The geometrical analysis of the motion of fish given in this paper, permits to embrace all the fundamental elements of its external and internal cynematics and dinamics. The peculiar feature of this work is that not the displacement of separate section of the body is examined, but that of the elements of a solid wave propagated along the body.

Only such a treatment of the problem made it possible to avoid the invincible obstacles raised on the way of the investigators who, alike to Gray, had tried to trace the «eights», described by the individual sections of a fish body. The above mentioned circumstance ought not to be forgotten in the examination of all the diagrams. One has to remember that all the values calculated are timed up to a certain distance from the head, along the axis. On this distance various elements of the body will be inevitably found during the same oscillation period. However it is not difficult to show that such a «creeping» of a section forward and backward along an imaginary «carcass» can be easily neglected.

Black Sea Hydrophysical Station.
Spring 1934.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

О НОВЫХ АЛГОРИФМАХ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ш. Е. МИКЕЛАДЗЕ

(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

§ 1. **Введение.** Для большей простоты рассуждений рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

замечая, что метода наша в одинаковой мере может быть применена как к общему случаю одного уравнения высшего порядка, так и к системе дифференциальных уравнений.

Пусть x, y изменяются в некоторой области D. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Lipschitz'а относительно y в той же области. Необходимо найти интегральную кривую данного уравнения, которая проходит через точку x_0, y_0, причем x_0, y_0 означает внутреннюю точку области D.

Можно указать сколь угодно малый интервал $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ с таким свойством, что для значений x, заключенных в этом интервале, дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

имеет один и только один интеграл, принимающий значение y_0 при $x = x_0$.

Пусть

$$x_i = x_0 + ih \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

где h достаточно малое положительное число. Обозначим через

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_i,\ \ldots$$

значения ординат интегральной кривой, так чтобы соответствующие абсциссы были бы:

$$x_0,\ x_0 + h,\ x_0 + 2h,\ \ldots,\ x_0 + ih,\ \ldots$$

Мы даем ряд алгорифмов, позволяющих определять по начальным значениям

$$y_r,\ y_{r+1},\ \cdots,\ y_{r+k-1}, \qquad r \geqslant 0,$$

приближенное значение y_{r+k}. Вычислительный процесс сводится либо к повторению однообразных простых операций, либо к решению системы уравнений алгебраических или трансцендентных.

Доказательство сходимости предлагаемых нами алгорифмов может быть получено чрезвычайно просто, следуя либо методе, которой пользовался Я. Д. Тамаркин* для доказательства сходимости алгорифма C. Störmer'a, либо при помощи методы, излагаемой нами в работе: «О численном интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными».**

Наши алгорифмы от алгорифмов C. Störmer'a и им подобных отличаются тем, что не требуют составления таблиц разностей или экстраполирования, с вычислением неизвестных сумм, входящих в состав формул, получаемых при посредстве методы квадратур.*** Сверх того, если для применения методы C. Störmer'a необходимо предварительно вычислить, например, три начальных значения

$$y_1,\ y_2,\ y_3,$$

то, при одной и той же степени точности доставляемых результатов, для начала пользования нашей методой необходимо иметь вычисленным одно начальное значение y_1.

Конечно, вычисление начальных значений

$$y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_{n-1},$$

как в случае уже известных методов интегрирования, так и нашей, исполняется каким-либо способом приближенного интегрирования.

В виду чрезвычайной простоты наших алгорифмов они, по нашему мнению могут представить значительный практический интерес. Во многих вопросах прикладного характера эти алгорифмы быстрее приводят к цели, нежели формулы, основанные на методах разностей или квадратур.

Основные результаты предлагаемых нами способов численного интегрирования получаются либо:

1°. Комбинированием разложений интеграла данного дифференциального уравнения в ряд Тайлора, допуская, что это разложение существует вблизи любого значения x, находящегося внутри интересующего нас интервала.

* J. Tamarkine. Sur la méthode de C. Störmer pour l'intégration approchée des équations différentielles ordinaires. Math. Ztschr., Bd. 16, 1923, S. 214—219.

** Изв. Акад. Наук СССР, 1934, № 6.

*** М. Ф. Субботин. Численное интегрирование дифференциальных уравнений. Бюлл. Среднеаз. гос. унив., Ташкент, 1927 и 1928, № 16 и 17.

2°. Формулами механических квадратур.

В последнем случае мы пользуемся свойством суммы

$$h \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i, y_i)$$

стремиться к интегралу

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y)\, dx,$$

в предположении, что x_i, y_i — координаты точки интегральной кривой уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Высказанное предположение станет очевидным, если данное дифференциальное уравнение, с соответствующими начальными условиями, представить в равносильной интегральной форме

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y)\, dx,$$

и учесть то обстоятельство, что подинтегральная функция зависит только лишь от x, ибо

$$y = y(x)$$

есть уравнение заведомо единственной интегральной кривой, проходящей через точку x_0, y_0 плоскости.

Для приближенного вычисления интеграла

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y)\, dx$$

существует множество формул. Из доставляющих наилучшее приближение формул наиболее подходящими для нас будут те, которые удовлетворяют следующим условиям:

1°. Абсциссы x_i обеспечивают вычисление

$$f(x_i, y_i)$$

наипростейшим образом, что осуществляется выбором рациональных значений x_i.

2°. Коэффициенты A_i не должны усложнять вычисление суммы

$$\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i, y_i).$$

3°. x_i и A_i должны быть независимыми от вида функции $f(x, y)$.

Относительно сходимости формул механических квадратур (понимаем этот термин в смысле акад. В. А. Стеклова), отметим, что формулы эти сходятся* для всякой интегрируемой функции $f(x, y)$, если коэффициенты A_i положительны. В случае

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| < A,$$

где A есть число, не зависящее от n, всякая формула квадратур сходится для любой функции $f(x, y)$, непрерывной в интересующем нас интервале.

Несколько иначе обстоит дело с формулой Котеса. Формула Котеса сходится для всякой функции, имеющей производные всех порядков, удовлетворяющие условию

$$\frac{|f^{(k)}(x, y)|}{k!} < N,$$

где k есть какое угодно целое число, а N есть положительное число, не зависящее от k.

Наиудобнейшие формулы для численного интегрирования дифференциальных уравнений доставляются формулами квадратур Симпсона, Котеса и, наконец, применением способа трапеций.

Формула Гаусса, — наилучшая по точности доставляемых результатов, — не имеет практического приложения при интегрировании дифференциальных уравнений. Это и понятно, ибо величины x_i и A_i определяются, как корни некоторых алгебраических уравнений только лишь приближенно, вследствие чего вычисление суммы

$$\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i, y_i)$$

с нужным числом знаков будет протекать исключительно кропотливо. То же относится и к формуле Чебышева, хотя там грамоздкость вычислительной работы частично устраняется тем обстоятельством, что

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n.$$

Итак, численное интегрирование данного дифференциального уравнения нами ведется по формуле:

$$y_n = y_0 + h \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i, y_i) + R_n, \tag{1}$$

где R_n остаточный член.

* В. А. Стеклов. О приближенном вычислении определенных интегралов при помощи формул механических квадратур. Изв. Акад. Наук, Пгр., 1916, VI сер., № 3, стр. 169—186.

Пусть Y_i обозначает приближенное значение y_i. Пренебрегая остаточным членом R_n, будем иметь следующее приближенное соотношение:

$$Y_n = Y_0 + h \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i, Y_i), \tag{2}$$

и, если предварительно вычислены начальные значения

$$y_0 = Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_{n-1},$$

то для вычисления Y_n приходим к необходимости решения уравнения (2) с одним неизвестным.

В том частном случае, когда имеем дело с линейными дифференциальными уравнениями m-го порядка или с системой m дифференциальных уравнений первого порядка, численное интегрирование сводится к фактическому решению системы m линейных уравнений с m неизвестными, что может быть исполнено по одному из способов решения уравнений, а в частности, при сравнительно ограниченной степени точности, и графически.

Для доказательства сходимости нашей методы достаточно показать, что, если внутри интересующего нас интервала

$$x = \chi > x_0,$$

то

$$\lim_{h \to 0} Y(\chi) = y(x).$$

Доказательству сходимости процесса и установлению высшего предела погрешности уделяем следующий параграф.

Алгорифмы, в основу получения которых положена способность y разлагаться в ряд Тайлора вблизи любой точки x промежутка интегрирования, дают возможность непосредственного вычисления y_i по уже известным значениям

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{i-1},$$

не прибегая к решению каких-либо уравнений алгебраических или трансцендентных.

Однако, при решении задач с граничными условиями, если промежуток интегрирования сколько-нибудь велик, и здесь неизбежно приходится прибегать к решению системы уравнений со многими неизвестными. Например, для уравнения второго порядка при заданных граничных условиях

$$x = x_0,\ y = y_0$$

и

$$x = a,\ y = b,$$

сущность этого способа решения заключается в установлении соотношения между значениями y во внутренних и граничных (концы интервала) точках интервала (x_0, a) и последующем решении системы уравнений, доставляемых этим соотношением.

Следует отметить, что верхний предел погрешности для этих алгорифмов получается в столь удобной форме, что нередко имеется возможность вычисления приближенного числового значения погрешности.

Наконец, отметим возможность воспользоваться для построения формул численного интегрирования дифференциальных уравнений заметкой Dini, что число θ, входящее в формулу остаточного члена Лагранжа, имеет при h, стремящемся к нулю, предел

$$\frac{1}{n+2},$$

если только производная $(n+2)$-го порядка функции, представимой по формуле Тайлора, отлична от нуля. Иными словами для применения этой заметки к численному интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, достаточно, чтобы

$$y^{(n+2)}(x) \neq 0.$$

P. Mazzoni* на основе тех же соображений строит ряд формул приближенных квадратур. Чтоб пояснить идею предлагаемой методы, рассмотрим, например, численное интегрирование уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{3}$$

На основе вышеизложенного должно при $n = 0$ и $h \to 0$, $\theta \to \frac{1}{2}$. Следовательно, для достаточно малых значений h получится:

$$y(x_0 + h) = y_0 + hf\left[x_0 + \frac{h}{2}, \quad y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right],$$

если

$$y''(x_0) \neq 0.$$

Вычислив каким-либо способом значение функции $y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$, соответствующее значению аргумента $x_0 + \frac{h}{2}$, можем принять

$$x_0 + \frac{h}{2} \quad \text{и} \quad y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$$

* P. Mazzoni. Sul resto di Lagrange nello sviloppo di Taylor. Rendic. del Circolo Mat. di Palermo, t. LII, 1928, p. 44 — 57.

за новые начальные значения аргумента и функции и, для вычисления

$$y\left(x_0 + \frac{3}{2}h\right),$$

записать:

$$y\left(x_0 + \frac{3}{2}h\right) = y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + hf\left[x_0 + h,\ y(x_0 + h)\right].$$

Операцию можно продолжить, пока не будет достигнут конец интересующего нас интервала.

Вернемся к численному интегрированию уравнений при посредстве формул механических квадратур. Формула Симпсона для интегрирования уравнения (3) доставляет следующее соотношение:

$$y(x_0 + h) = y_0 + \frac{h}{6}\left[f(x_0, y_0) + 4f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right) + \right.$$
$$\left. + f(x_0 + h,\ y(x_0 + h))\right]. \tag{4}$$

Если $y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$ известно, то, решая уравнение (4) относительно $y(x_0 + h)$, получим интересующее нас значение. При этом, как будет ниже доказано, погрешность оказывается по крайней мере четвертого порядка малости относительно h.

Если правую часть (4) преобразовать при посредстве приближенных соотношений

$$y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \approx y_0 + \frac{h}{2}f(x_0, y_0)$$

и

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + hf\left[x_0 + h,\ y_0 + hf(x_0, y_0)\right],$$

то получим формулу Runge.* Последняя замена оправдывается нижеприводимыми соображениями. Вообразим касательную к интегральной кривой в точке

$$x_0 + h,\ y_0 + hf(x_0, y_0)$$

предполагая, что эта точка лежит на интегральной кривой. Тангенс угла наклонения этой касательной будет:

$$f\left[x_0 + h,\ y_0 + hf(x_0, y_0)\right].$$

Проведем из точки x_0, y_0 прямую под этим наклоном до пересечения с прямой, проходящей параллельно оси y-ов и отсекающей на оси абсцисс отрезок $x_0 + h$,

* C. Runge. Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. Math. Ann., Bd. 46, 1895, S. 167—178.

считая за один конец отрезка начало координат. Точка пересечения будет лежать весьма близко к точке интегральной кривой с координатами

$$x_0 + h,\ y(x_0 + h),$$

и, следовательно, в качестве приближения можно принять:

$$y(x_0 + h) = y_0 + hf[x_0 + h,\ y_0 + hf(x_0, y_0)].$$

Отсюда вытекает следующее правило: последовательно вычисляются величины

$$\Delta' = hf(x_0,\ y_0),$$
$$\Delta'' = hf\left[x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{\Delta'}{2}\right],$$
$$\Delta''' = hf[x_0 + h,\ y_0 + \Delta'],$$
$$\Delta'''' = hf[x_0 + h,\ y_0 + \Delta'''],$$

и далее вычисляется $y(x_0 + h)$ по формуле

$$y(x_0 + h) = y_0 + \frac{\Delta' + 4\Delta'' + \Delta''''}{6}.$$

При этом погрешность оказывается пропорциональной (приблизительно) h^4.

Более точные результаты доставляет формула Kutta,* который последовательно вычисляет величины

$$\Delta' = hf(x_0,\ y_0),$$
$$\Delta'' = hf\left[x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{\Delta'}{2}\right],$$
$$\Delta''' = hf\left[x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{\Delta''}{2}\right],$$
$$\Delta'''' = hf[x_0 + h,\ y_0 + \Delta'''],$$

а затем полагает

$$y(x_0 + h) = y_0 + \frac{\Delta' + 2\Delta'' + 2\Delta''' + \Delta''''}{6}.$$

При этом погрешность оказывается пропорциональной (приблизительно) h^5.

Легко усмотреть, что и формула Kutta получается из формулы Симпсона.

В самом деле, тангенс угла наклонения касательной к интегральной кривой в точке

$$x_0 + \frac{h}{2},\ y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$$

* W. Kutta. Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen. Ztschr. f. Math. u. Phys., Bd. 46, 1901, S. 435—453.

есть

$$y'\left(x_0+\frac{h}{2}\right)=f\left[x_0+\frac{h}{2},\ y\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\right].$$

Но так как

$$y\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\approx y_0+\frac{h}{2}f(x_0,\ y_0),$$

то

$$y'\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\approx f\left[x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{h}{2}f(x_0,\ y_0)\right]. \tag{5}$$

Вычисляем ординату точки касания по формуле

$$y\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\approx y_0+\frac{h}{2}f\left[x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{h}{2}f(x_0,\ y_0)\right],$$

и, следовательно, в качестве второго приближения для тангенса угла наклонения касательной к интегральной кривой в точке

$$x_0+\frac{h}{2},\ y\left(x_0+\frac{h}{2}\right),$$

можем положить:

$$y'\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\approx f\left\{x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{h}{2}f\left[x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{h}{2}f(x_0,\ y_0)\right]\right\}. \tag{6}$$

Проведем из точки $x_0,\ y_0$ под уклоном

$$f\left\{x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{h}{2}f\left[x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{h}{2}f(x_0,\ y_0)\right]\right\}$$

прямую до пересечения с прямой, проходящей параллельно оси y-ов и отсекающей на оси абсцисс отрезок x_0+h, считая за один конец отрезка начало координат. Точка пересечения будет весьма близко лежать к точке интегральной кривой с координатами

$$x_0+h,\ y(x_0+h),$$

так что можно положить

$$y(x_0+h)\approx y_0+hf\left\{x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{h}{2}f\left[x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{h}{2}f(x_0,\ y_0)\right]\right\}. \tag{7}$$

Внося в правую часть формулы Симпсона, вместо

$$f\left[x_0+\frac{h}{2},\ y\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\right]$$

среднее арифметическое величин (5) и (6), а вместо $y(x_0+h)$, — ее приближенное значение (7), получим формулу Kutta.

Наконец, если разделить промежуток интегрирования на три равные части, то согласно формулы Котеса будем иметь:

$$y(x_0+h)=y_0+\frac{h}{8}\left\{f(x_0,\,y_0)+3f\left[x_0+\frac{h}{3},\,y\left(x_0+\frac{h}{3}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+3f\left[x_0+\frac{2h}{3},\,y\left(x_0+\frac{2h}{3}\right)\right]+f[x_0+h,\,y(x_0+h)]\right\}.$$

Принимая приближенно

$$y\left(x_0+\frac{h}{3}\right)\approx y_0+\frac{\Delta'}{3},$$
$$y\left(x_0+\frac{2h}{3}\right)\approx y_0+\Delta''-\frac{\Delta'}{3},$$
$$y(x_0+h)\approx y_0+\Delta'''-\Delta''+\Delta',$$

где

$$\Delta'=hf(x_0,\,y_0),$$
$$\Delta''=hf\left[x_0+\frac{h}{3},\,y_0+\frac{\Delta'}{3}\right],$$
$$\Delta'''=hf\left[x_0+\frac{2h}{3},\,y_0+\Delta''-\frac{\Delta'}{3}\right],$$
$$\Delta''''=hf[x_0+h,\,y_0+\Delta'''-\Delta''+\Delta'],$$

будем иметь

$$y(x_0+h)=y_0+\frac{\Delta'+3\Delta''+3\Delta'''+\Delta''''}{8}.$$

Эта формула принадлежит так же Kutta.

Мы подробно остановились на формулах Runge-Kutta, так как в последнее время относительно методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений в литературе существуют самые противоречивые взгляды. Так, например, E. T. Whittaker,* отмечая, что лучший метод численного интегрирования дифференциальных уравнений намечен Adams'ом, способы Runge и Kutta относит к библиографическим заметкам. Напротив Hort** очень много примеров технического характера решает методой Runge, не излагая вовсе методы Störmer'a. Не так давно H. T. H. Piaggio*** и E. Remes,**** в целях уточнения результатов, доставляемых формулами Runge-Kutta, при посредстве фор-

* Э. Уиттекер и Г. Робинсон. Математическая обработка результатов наблюдений. Перевод с английского под ред. проф. Н. М. Гюнтера. Л.—М. 1933.

** Проф. В. Горт. Дифференциальные уравнения. Перевод с немецкого под ред. проф. Р. О. Кузьмина. Л.—М. 1933.

*** H. T. H. Piaggio. On the Numerical Integration of Differential Equations. Phil. Mag., vol. 37, № 222, 1919, p. 596—600.

**** E. Remes. Some Approximate Formulae for the Numerical Integration of Differential Equations. Phil. Mag., vol. 5, № 28, 1928, p. 392—400.

мулы Симпсона, развили методу, сущность которой заключается в следующем: пусть функция $f(x, y)$ в области прямоугольника, образуемого прямыми

$$x = x_0,\ x = x_0 + h,\ y = y_0 + h \text{ и } y = y_0 - h$$

вместе со своими первыми и вторыми частными производными конечна и непрерывна и по абсолютному значению никогда не превосходит единицы; сверх того, если

$$\frac{d^3y}{dx^3} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

не меняют знака в той же области, то можно отыскать четыре числа

$$p = hf\left[x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + m\frac{h}{2}\right]$$

$$P = hf\left[x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + M\frac{h}{2}\right]$$

$$Q = \frac{h}{4}\left[f(x_0, y_0) + 2f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + M\frac{h}{2}\right) + f(x_0 + h,\ y_0 + Mh)\right],$$

и

$$q = \frac{h}{4}\left[f(x_0, y_0) + 2f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + m\frac{h}{2}\right) + f(x_0 + h,\ y_0 + mh)\right],$$

где m и M внутри интервала $(x_0,\ x_0 + h)$ должны удовлетворять условию

$$-1 \leqslant m < f(x, y) < M \leqslant 1,$$

таких, что

$$y - y_0$$

будет заключаться между наибольшим и наименьшим из этих чисел:

$$p,\ P,\ q \text{ и } Q.$$

В качестве приближенной формулы Piaggio берет формулу Симпсона *

$$y - y_0 \approx \frac{2}{3}B + \frac{1}{3}A,$$

заменяя B через Q или q, и A через p или P.

Remes дает систематический метод определения чисел m и M и доказывает, что ошибка приближенной формулы Piaggio при таком определении чисел m и M, в зависимости от представившихся случаев по крайней мере четвертого и соответственно третьего порядка малости относительно h.

---

* $B = \frac{h}{4}\left\{f(x_0, y_0) + 2f\left[x_0 + \frac{h}{2},\ y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right] + f(x_0 + h,\ y(x_0 + h))\right\},$

$$A = hf\left[x_0 + \frac{h}{2},\ y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right].$$

Как для инженерного дела, так и для других менее точных наук требуются легкопонятные, удобоприменимые и быстро приводящие к цели методы. Нам кажется, что этим условиям метода Piaggio не удовлетворяет, между тем, как пользуясь методой механических квадратур, мы кроме точности доставляемых результатов достигаем значительной простоты в методах численного решения дифференциальных уравнений любого порядка.

§ 2. **Доказательство сходимости процесса способа механических квадратур.** Численный пример. Для простоты рассмотрим способ численного интегрирования уравнения первого порядка с одной неизвестной функцией. Пусть R_n величина $(l+1)$-го порядка малости относительно h. Для вычисления y_{n+k} будем иметь формулу:

$$y_{n+k} = y_k + h \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_{i+k}, y_{i+k}) + 0(h^{l+1}), \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

Пусть

$$Y_0, \; Y_1, \; \ldots, \; Y_n, \; \ldots$$

обозначают приближенные значения

$$y_0, \; y_1, \; \ldots, \; y_n, \; \ldots,$$

а

$$\xi_0, \; \xi_1, \; \ldots, \; \xi_n, \; \ldots,$$

соответствующие ошибки, так что

$$y_{i+k} = Y_{i+k} + \xi_{i+k} \qquad \begin{matrix}(i = 0, 1, 2, \ldots, n),\\ (k = 0, 1, 2, \ldots).\end{matrix}$$

Приближенные значения Y_{i+k} удовлетворяют соотношению:

$$Y_{n+k} = Y_k + h \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_{i+k}, Y_{i+k}).$$

Путем почленного вычитания получается:

$$\xi_{n+k} = \xi_k + h \sum_{i=0}^{n} A_i [f(x_{i+k}, y_{i+k}) - f(x_{i+k}, Y_{i+k})] + O(h^{l+1}).$$

Обозначим через M_1 положительную постоянную, с таким свойством, что $O(h^{l+1})$ по абсолютному значению в интервале интегрирования было бы меньше $M_1 h^{l+1}$.

Допустим, что функция $f(x, y)$ непрерывная и удовлетворяет условию Lipschitz'a относительно y. Для любых двух точек области D, отличающихся только ординатой y, будем иметь

$$|f(x_{i+k}, y_{i+k}) - f(x_{i+k}, Y_{i+k})| < A|y_{i+k} - Y_{i+k}|,$$

где A — постоянная из условия Lipschitz'a.*

* Далее предполагаем, что функция $f(x, y)$ имеет частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$, ограниченную в области D, при этом за A принимаем верхнюю границу $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Пусть

$$A|A_i| < M, \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

будем иметь:

$$|\xi_{n+k}| < |\xi_k| + Mh \sum_{i=0}^{n} |\xi_{i+k}| + M_1 h^{l+1}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Перепишем теперь это неравенство под видом

$$(1 - Mh)|\xi_{n+k}| < |\xi_k| + Mh \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_{i+k}| + M_1 h^{l+1}. \tag{8}$$

В дальнейшем будем h предполагать столь малым, что

$$0 < 1 - Mh < 1.$$

Рассмотрим последовательность положительных чисел

$$\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$$

таких, что

$$\delta_0 < \delta_1 < \ldots < \delta_{n-1}$$

и

$$|\xi_0| < \delta_0, \ |\xi_1| < \delta_1, \ \ldots, \ |\xi_{n-1}| < \delta_{n-1}. \tag{9}$$

Пусть

$$(1 - Mh)\delta_{n+k} = \delta_{n+k-1} + Mhn\,\delta_{n+k-1} + M_1 h^{l+1}, \qquad k \geqslant 0. \tag{10}$$

Тогда будем иметь, что

$$\delta_{n+k-1} < (1 - Mh)\delta_{n+k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

и тем более

$$\delta_{n+k-1} < \delta_{n+k}.$$

Полагая последовательно $k = 0, 1, 2, \ldots$ при посредстве (8), (9), (10) и (11) находим, что

$$|\xi_\lambda| < \delta_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots).$$

Достаточно положить последовательно $k = 0, 1, 2, \ldots$, как из (10) получим рекуррентную систему уравнений. Путем последовательного исключения величин

$$\delta_{n+m}, \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

после простых преобразований и упрощений, находим:

$$(1 - Mh)^{k+1}\delta_{n+k} \leqslant (1 + nMh)^{k+1}\left[\delta_{n-1} + \frac{M_1 h^l}{Mn}\right] - \frac{M_1 h^l}{Mn}, \qquad (k \geqslant 0) \tag{12}$$

Допустим, что ошибки

$$|\xi_0|,\ |\xi_1|,\ \ldots,\ |\xi_{n-1}|$$

не ниже l-го порядка малости относительно h. В силу предположения можно положить

$$\delta_{n-1} < \beta \frac{M_1 h^l}{Mn}. \tag{13}$$

С помощью (12) и (13) получаем

$$(1 - Mh)^{k+1} \delta_{n+k} < \frac{M_1 h^l}{Mn}[(\beta + 1)(1 + nMh)^{k+1} - 1], \qquad (k \geqslant 0)$$

Пусть

$$rh = a,$$

где a длина промежутка интегрирования.
Будем иметь

$$n + k \leqslant r, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, r - n).$$

Следовательно

$$(1 + nMh)^{k+1} \leqslant \left(1 + \frac{nMa}{r}\right)^r < e^{Man}.$$

Можно указать такое постоянное число ν, что для всех значений $r > \nu$

$$(1 - Mh)^{k+1} \geqslant \left(1 - \frac{Ma}{r}\right)^r > \alpha,$$

где α некоторое положительное число. В силу сказанного (для $r > \nu$) окончательно приходим к следующей оценке:

$$\delta_{n+k} < \gamma h^l \qquad (k \geqslant 0),$$

где γ некоторое положительное число, не зависящее ни от h ни от k.

Таким путем получается следующая теорема.

Предположим, что функция $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Lipschitz'a относительно y в области (D); пусть x_0, y_0, означает внутреннюю точку этой области, пусть интегрирование выполняется при посредстве некоторой формулы механических квадратур с погрешностью

$$0(h^{l+1}),$$

тогда наибольшая ошибка соответствующая алгоритму численного интегрирования дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

по крайней мере l-го порядка малости относительно h, и метода интегрирования сходится, т. е. при $h \to 0$, $\xi_{n+k} \to 0$ и, следовательно,

$$Y_{n+k} \to y_{n+k}.$$

Так, например, при посредстве формулы Симпсона получается алгорифм:

$$(14) \qquad y_{x+2} = y_x + \frac{h}{3}[f(x, y_x) + 4f(x+h, y_{x+1}) + f(x+2h, y_{x+2})],$$

где

$$y_x,\ y_{x+1},\ y_{x+2}$$

обозначают ординаты точек некоторой интегральной кривой,* абсциссы которых суть

$$x,\ x+h,\ x+2h.$$

Погрешность формулы Симпсона имеет вид:

$$-\frac{(2h)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\frac{y^{V}(\xi)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

следовательно погрешность алгорифма (14) будет не ниже 4-го порядка малости относительно h.

Чтобы исполнить интегрирование, достаточно вычислить для начала одно значение y_{x+1}, ибо другое — y_x известно по начальному условию: когда $x = x_0$, то должно быть

$$y_x = y_{x_0}.$$

Чтобы притти при посредстве алгорифма Störmer'a к результатам такой же степени точности, какая соответствует алгорифму (14), необходимо обратиться к формуле:

$$y_{x+1} = y_x + \eta_x + \frac{1}{2}\Delta\eta_{x-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{x-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_{x-3} + O(h^5),$$

где

$$\eta_x = hf(x, y_x).$$

Для начала вычисления следует найти

$$y_{x-1},\ y_{x-2},\ y_{x-3}$$

то есть нужно знать три значения интеграла y.

В случае, когда предложенное дифференциальное уравнение высшего порядка линейное, или когда необходимо интегрировать систему линейных уравнений, метода квадратур чрезвычайно быстро приводит к цели.

* В дальнейшем через $y_{x+i}, y'_{x+i}, y''_{x+i}, \ldots$ будем обозначать значения $y, y', y'', \ldots$ в точках интегральной кривой, абсциссы которых суть $x + ih$.

Положим, например, что требуется интегрировать систему уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = y + z,$$

$$\frac{dy}{dt} = z + x,$$

$$\frac{dz}{dt} = x + y,$$

при начальных условиях: при $t = 0$ должно быть

$$x = -1,\ y = 1 \text{ и } z = 0.$$

При посредстве (14) получаем

$$x_{t+2} = a + \frac{h}{3}(y_{t+2} + z_{t+2}),$$

$$y_{t+2} = b + \frac{h}{3}(z_{t+2} + x_{t+2}),$$

$$z_{t+2} = c + \frac{h}{3}(x_{t+2} + y_{t+2}),$$

где

$$a = x_t + \frac{h}{3}[y_t + z_t + 4(y_{t+1} + z_{t+1})],$$

$$b = y_t + \frac{h}{3}[z_t + x_t + 4(z_{t+1} + x_{t+1})],$$

$$c = z_t + \frac{h}{3}[x_t + y_t + 4(x_{t+1} + y_{t+1})].$$

Без труда находим, что:

$$x_{t+2} = \frac{a + \frac{h}{3}(b + c - a)}{\left(1 + \frac{h}{3}\right)\left(1 - \frac{2h}{3}\right)},$$

$$y_{t+2} = \frac{b + \frac{h}{3}(a + c - b)}{\left(1 + \frac{h}{3}\right)\left(1 - \frac{2h}{3}\right)},$$

$$z_{t+2} = \frac{c + \frac{h}{3}(a + b - c)}{\left(1 + \frac{h}{3}\right)\left(1 - \frac{2h}{3}\right)}.$$

Начальные значения x_1, y_1, z_1 вычисляем разложением x, y и z в ряды. Находим:

$$x_1 = -y_1 = -0.90484,\ z_1 = 0,$$

вследствие чего получается

$$a = -b,\ c = 0,$$

и алгорифм интегрирования данной системы получает следующий окончательный вид:

$$x_{t+2} = -y_{t+2} = \frac{x_t - \frac{h}{3}(x_t + 4x_{t+1})}{1 + \frac{h}{3}};\ z = 0.$$

Интегрирование будем вести при ступени $h = 0.1$.

Результаты вычисления представлены в таблице:

t	$x = -y$		z	t	$x = -y$		z
	Приближенные значения	Точные значения			Приближенные значения	Точные значения	
0.		1.	0.	1.1	0.33286	0.33287	0.
0.1		0.90484		1.2	0.30120	0.30119	
0.2	0.81873	0.81873		1.3	0.27252	0.27253	
0.3	0.74082	0.74082		1.4	0.24660	0.24660	
0.4	0.67032	0.67032		1.5	0.22312	0.22313	
0.5	0.60653	0.60653		1.6	0.20190	0.20190	
0.6	0.54881	0.54881		1.7	0.18267	0.18268	
0.7	0.49658	0.49659		1.8	0.16530	0.16530	
0.8	0.44933	0.44933		1.9	0.14956	0.14957	
0.9	0.40656	0.40657		2.0	0.13534	0.13534	
1.0	0.36788	0.36788					

Точные значения x, y и z легко получить, так как решение данной системы есть:

$$x = -e^{-t},\ y = e^{-t},\ z = 0.$$

§ 3. **О способе Эйлера.** Пусть интегрируется уравнение порядка m и вида

$$\frac{d^m y}{dx^m} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right), \tag{15}$$

при начальных условиях: при $x = x_0$, должно быть

$$y_x = y_0,\ y_x' = y_0',\ y_x'' = y_0'',\ \ldots,\ y_x^{(m-1)} = y_0^{(m-1)}.$$

Последовательные значения

$$y_{x+1},\ y_{x+2},\ y_{x+3};\ \ldots$$

могут быть получены при посредстве формул:

$$y_{x+1} = y_x + \frac{h}{1} y_x' + \ldots + \frac{h^{m-1}}{(m-1)!} y_x^{(m-1)} + \frac{h^m}{m!} y_x^{(m)},$$

$$y'_{x+1} = y_x' + \frac{h}{1} y_x'' + \ldots + \frac{h^{m-1}}{(m-1)!} y_x^{(m)},$$

. . . . . .

$$y_{x+1}^{(m-1)} = y_x^{(m-1)} + \frac{h}{1} y_x^{(m)},$$

$$y_x^{(m)} = f[x, y_x, y_x', \ldots, y_x^{(m-1)}].$$

Мы имеем показать возможность уточнения этих формул. Пусть вблизи x функция y и ее производные до $(m-1)$-го порядка включительно представимы по Тайлоровой формуле, так что

$$y_{x+1}^{(k)} = y_x^{(k)} + h y_x^{(k+1)} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y_x^{(k+2)} + \ldots + \frac{h^{m-k-1}}{1 \cdot 2 \ldots (m-k-1)} y_x^{(m-1)} + R_{m-1},$$

$$(k = 0, 1, \ldots, m-1),$$

где

$$R_{m-1} = \frac{h^{m-k}}{1 \cdot 2 \ldots (m-k)} y_{x+\theta}^{(m)}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

С другой стороны, пусть вблизи x имеет место разложение

$$R_{m-1} = \frac{h^{m-k}}{(m-k)!} \left[y_x^{(m)} + \frac{\theta h}{1} y_x^{(m+1)} + \frac{\theta^2 h^2}{1 \cdot 2} y_x^{(m+2)} + \ldots \right]. \tag{16}$$

Но

$$R_{m-1} = \frac{h^{m-k}}{(m-k)!} \left[y_x^{(m)} + \frac{h}{m-k+1} y_x^{(m+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{h^2}{(m-k+1)(m-k+2)} y_x^{(m+2)} + \ldots \right]. \tag{17}$$

Путем уравнивания правых частей (16) и (17) получится:

$$\left(\theta - \frac{1}{m-k+1}\right) y_x^{(m+1)} + \left(\frac{\theta^2}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(m-k+1)(m-k+2)}\right) h y_x^{(m+2)} + \ldots = 0.$$

Если $y_x^{(m+1)} \neq 0$, то для достаточно малых значений h будет иметь место следующее приближенное равенство:

$$\theta \approx \frac{1}{m-k+1}.$$

Но, если

$$y_x^{(m+1)} = 0,$$

а

$$y_x^{(m+2)} \neq 0,$$

необходимо положить

$$0 \approx \sqrt{\frac{2}{(m-k+1)(m-k+2)}}$$

и т. д.

Таким образом формулы численного интегрирования уравнения (15) будут иметь следующий вид:

$$y_{x+1} = y_x + hy_x' + \frac{h^2}{1\cdot 2} y_x'' + \ldots + \frac{h^{m-1}}{(m-1)!} y_x^{(m-1)} + \frac{h^m}{m!} y^{(m)}_{x+\frac{1}{m+1}},$$

$$y'_{x+1} = y_x' + \frac{h}{1} y_x'' + \ldots + \frac{h^{m-1}}{(m-1)!} y^{(m)}_{x+\frac{1}{m}},$$

. . . . . .

$$y^{(m-1)}_{x+1} = y_x^{(m-1)} + \frac{h}{1} y^{(m)}_{x+\frac{1}{2}}.$$

Формулы эти, если

$$y_x^{(m+1)} \neq 0,$$

вообще говоря, будут доставлять более точные значения для y_{x+1}, нежели метода Эйлера.

Так, например, если искомая функция y определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

и начальными условиями: при $x = x_0$, должно быть $y = y_0$, то для вычисления y_{x_0+1} будем иметь формулу:

$$y_{x_0+1} = y_{x_0} + hy'_{x_0+\frac{1}{2}}.$$

Но в том случае, когда

$$y''_{x_0} = 0, \text{ а } y'''_{x_0} \neq 0,$$

полезнее вычисление вести по формуле

$$y_{x_0+1} = y_{x_0} + hy'_{x_0+\frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

Рассмотрим, наконец, дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Требуется численно проинтегрировать это уравнение при начальных условиях: когда $x = x_0$, то должно быть

$$y = y_{x_0}, \; y' = y'_{x_0}.$$

Значение y_{x_0+1}, согласно вышеизложенного, будет доставляться формулами:

$$y_{x_0+1} = y_{x_0} + \frac{h}{1} y'_{x_0} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y''_{x_0+\frac{1}{3}}.$$

$$y'_{x_0+1} = y'_{x_0} + h y''_{x_0+\frac{1}{2}}.$$

Мы не ограничимся этими формулами, пользоваться которыми на практике не удобно, а в следующих параграфах снова вернемся к интегрированию уравнения второго порядка, как наиболее встречающегося во многих вопросах прикладного характера.

§ 4. О численном интегрировании дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Предложим себе проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right), \tag{18}$$

при начальных условиях: при $x = x_0$ должно быть $y = y_0$, $\frac{dy}{dx} = y_0'$.

Пусть

$$y_{x+1}^{(k)} = A + h^{m-k}\left[\alpha y_x^{(m)} + \beta y_{x+\theta}^{(m)}\right], \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

где

$$A = y_x^{(k)} + \frac{h}{1} y_x^{(k+1)} + \ldots + \frac{h^{m-k-1}}{(m-k-1)!} y_x^{(m-1)},$$

а

$$\alpha, \ \beta \text{ и } \theta$$

подлежащие определению неизвестные параметры. Пусть вблизи x имеет место разложение

$$y_{x+\theta}^{(m)} = y_x^{(m)} + \frac{\theta h}{1} y_x^{(m+1)} + \frac{\theta^2 h^2}{1 \cdot 2} y_x^{(m+2)} + \ldots$$

Следовательно,

$$y_{x+1}^{(k)} = A + h^{m-k}\left[(\alpha + \beta) y_x^{(m)} + \frac{\beta\theta h}{1} y_x^{(m+1)} + \frac{\beta\theta^2 h^2}{1 \cdot 2} y_x^{(m+2)} + \ldots\right].$$

С другой стороны, вблизи x

$$y_{x+1}^{(k)} = A + \frac{h^{m-k}}{(m-k)!} y_x^{(m)} + \frac{h^{m-k+1}}{(m-k+1)!} y_x^{(m+1)} + \frac{h^{m-k+2}}{(m-k+2)!} y_x^{(m+2)} + \ldots$$

Путем сравнения коэффициентов при одних и тех же степенях h, полученных разложений, находим:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{(m-k)!}$$

$$\beta\theta = \frac{1}{(m-k+1)!}$$

$$\beta\theta^2 = \frac{2}{(m-k+2)!}$$

. . . . . .

Если бы мы хотели иметь для $y^{(k)}$ формулу, верную до членов $(m-k+2)$-го порядка малости относительно h, то надо сделать

$$\alpha = \frac{m-k}{2\,(m-k+1)!},$$

$$\beta = \frac{m-k+2}{2\,(m-k+1)!},$$

$$\theta = \frac{2}{m-k+2},$$

и искомая формула имела бы вид:

$$y^{(k)}_{x+1} = A + \frac{h^{m-k}}{2\,(m-k+1)!}\left[(m-k)\,y_x^{(m)} + (m-k+2)\,y^{(m)}_{x+\frac{2}{m-k+2}}\right].$$

Полагая в частности $m = 1$, $k = 0$, приходим к формуле Heun'a: *

$$y_{x+1} = y_x + \frac{h}{4}\left[f(x, y_x) + 3f\left(x + \frac{2}{3}h,\ y_{x+\frac{2}{3}}\right)\right], \tag{19}$$

при посредстве которой можно интегрировать уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Формула (19) имеет те же недостатки, как и формулы Runge и Kutta; эти недостатки ярко очерчены акад. А. Н. Крыловым.** Однако, если написать (19) в виде

$$y'_{x+1} = y'_x + \frac{h}{4}\left[y''_x + 3y''_{x+\frac{2}{3}}\right],$$

* K. Heun.-Neue Methode zur approximativen Integration der Differentialgleichungen einer unabhängigen Veränderlichen. Ztschr. f. Math. u. Phys., Bd. 45, 1900, S. 23—38.

** Акад. А. Н. Крылов. Приближенное численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. Берлин, 1928.

и к этой формуле присовокупить формулу § 3

$$y_{x+1} = y_x + \frac{h}{1} y'_x + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y''_{x+\frac{1}{3}},$$

получим алгорифм, позволяющий по начальным значениям

$$y_{x+\frac{1}{3}},\ y_{x+\frac{2}{3}},\ y'_{x+\frac{1}{3}},\ y'_{x+\frac{2}{3}}$$

чрезвычайно быстро интегрировать уравнение (18). Замечательно при этом то, что при переходе от одной пары значений

$$y_{x+\frac{2}{3}},\ y'_{x+\frac{2}{3}}$$

к другой

$$y_{x+1},\ y'_{x+1}$$

приходится вычислять величину

$$f(x,\ y,\ y')$$

один лишь раз.

Способом, аналогичным § 2 можно доказать сходимость приводимой выше методы и установить, что численные значения y и y' доставляются с погрешностью по крайней мере 3-го порядка малости относительно h.

В тех случаях, когда точность доставляемых результатов алгорифмом Störmer'a одинаковая с предлагаемой нами методой, затраты труда на работу у нас не больше, простота же вычисления будет видна из приводимого ниже примера.

Чтоб пояснить порядок вычисления и дать понятие о точности методы, поставим себе задачей проинтегрировать уравнение движения материальной точки

$$y'' + (1 + 0.1t)y + 0.1y'^2 = 0,$$

при начальных условиях: при $t = 0$ должно быть $y = 1$ м, $y' = 2$ м/сек. Сверх того найдем амплитуду первого размаха.*

При посредстве ряда Тайлора вычисляем

$$y(0.1),\ y'(0.1),\ y(0.2),\ y'(0.2).$$

* Пример заимствован у акад. А. Н. Крылова. См. „Лекции о приближенных вычислениях" Ленинград, 1933, стр. 338.

Интегрирование будем вести при ступени $h = 0.3$. Ход вычисления пояснений не требует и виден из приводимой таблицы.

t	y	y'	y''
0.	1.000	2.000	—1.400
0.1	1.193	1.852	—1.548
0.2	1.370	1.691	—1.683
0.3	1.530	1.516	—1.806
0.4	1.673	1.330	—1.917
0.5	1.796	1.133	—2.014
0.6	1.899	0.927	—2.099
0.7	1.981	0.714	—2.171
0.8	2.041	0.493	—2.229
0.9	2.079	0.268	—2.273
1.0	2.095	0.039	—2.305
1.1	2.087	—0.193	

Чтобы определить время, в течение которого материальная точка совершит первый размах, разлагаем y' вблизи $t = 1$ в ряд Тайлора

$$y' = 0.039 - 2.305h - 0.117h^2 - \ldots$$

Пренебрегая в правой части разложения третьим и следующими членами, а левую часть приравнивая нулю, — так как в момент совершания первого размаха $y' = 0$, получим

$$h \approx 0.017.$$

Следовательно, искомое значение t есть

$$t_1 = 1.017,$$

чтобы найти амплитуду первого размаха, разлагаем y вблизи $t = 1$ в ряд Тайлора:

$$y \approx 2.095 + 0.017 \cdot 0.039 - \frac{(0.017)^2}{1 \cdot 2} 2.305 + \ldots$$

Пренебрегая четвертым и следующими членами разложения, будем иметь

$$y \approx 2.095.$$

Полученный нами алгорифм для интегрирования уравнения второго порядка не единственный. Так, например, полагая $m = 2$ и $k = 0$, будем иметь

$$\alpha = \frac{1}{6}, \quad \beta = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \theta = \frac{1}{2}.$$

Следовательно

$$y_{x+1} = y_x + hy'_x + \frac{h^2}{6}\left[y''_x + 2y''_{x+\frac{1}{2}}\right]. \tag{20}$$

С другой стороны

$$y'_{x+1} = y'_x + \int_x^{x+h} f(x, y, y')\,dx.$$

Пользуясь формулой Симпсона, получим

$$y'_{x+1} = y'_x + \frac{h}{6}\left[y''_x + 4y''_{x+\frac{1}{2}} + y''_{x+1}\right] \tag{21}$$

Формулы (20) и (21) особенно удобны для интегрирования уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y),$$

по начальному значению

$$y_{x+\frac{1}{2}}.$$

В самом деле, пусть при $x = x_0$ должно быть

$$y_x = y_0,\ y_x' = y_0'.$$

Присовокупив к этим данным значение $y_{x+\frac{1}{2}}$, с помощью формулы (20) немедленно находим y_{x+1}, а по значениям

$$y_x',\ y_x,\ y_{x+\frac{1}{2}},\ y_{x+1},$$

при посредстве формулы (21), без труда вычисляем y'_{x+1} и т. д.

Способом аналогичным § 2 легко доказать сходимость процесса и установить, что ошибка алгорифма по крайней мере 4-го порядка малости относительно h.

Чтоб пояснить порядок вычисления и дать понятие о точности нашей методы, рассмотрим пример

$$x'' + p^2 x = 0,$$

который приводит С. П. Тимошенко* для иллюстрации своего метода.

Положим, например, что при $t = 0$ должно быть:

$$x = x_0,\ x' = 0.$$

* С. П. Тимошенко. Теория колебаний в инженерном деле. Перевод с английского, Москва, 1932, стр. 85.

Интегрирование будем вести при ступени

$$h = \frac{1}{2p}.$$

При посредстве ряда Тайлора находим

$$x_{\frac{1}{2}} = 0.96891 x_0, \quad x'_{\frac{1}{2}} = -0.24740 p x_0,$$

и, следовательно

$$x''_{\frac{1}{2}} = -0.96891 p^2 x_0.$$

Точное решение предложенного уравнения при данных начальных условиях есть:

$$x = x_0 \cos pt.$$

Окончательный результат представится в виде таблицы такого вида:

t	x	x'	x''	$\cos pt$	$\sin pt$
0	x_0	0.	$-p^2 x_0$	1.	0.
$\frac{1}{4p}$	0.96891 x_0	—0.24740 px_0	—0.96891 $p^2 x_0$	0.96891	0.24740
$\frac{1}{2p}$	0.87759 »	—0.47944 »	—0.87759 »	0.87758	0.47943
$\frac{3}{4p}$	0.73171 »	—0.68165 »	—0.73171 »	0.73169	0.68164
$\frac{1}{p}$	0.54033 »	—0.84150 »	—0.54033 »	0.54030	0.84147
$\frac{5}{4p}$	0.31537 »	—0.94902 »	—0.31537 »	0.31532	0.94898
$\frac{3}{2p}$	0.07079 »	—0.99755 »	—0.07079 »	0.07074	0.99749
$\frac{7}{4p}$	—0.17818 »	—0.98405 »	+0.17818 »	—0.17825	0.98399

Сущность методы С. П. Тимошенко заключается в вычислении x_1 и x_1' по формулам

$$x_1' = x_0' + \Delta t x_0'', \; x_1 = x_0 + \frac{x_0' + x_1'}{2} \Delta t,$$

где

$$\Delta t = \frac{1}{4p}.$$

Вторые приближения x_1 и x_1' доставляются формулами:

$$x_1' = x_0' + \frac{x_0'' + x_1''}{2} \Delta t \quad \text{и} \quad x_1 = x_0 + \frac{x_0' + x_1'}{2} \Delta t.$$

В результате интегрирования предложенного уравнения получилось, что на всем протяжении промежутка интегрирования абсолютная погрешность для значений x по нашей методе не превосходит

$$0.00007\,|x_0|,$$

а по методе С. П. Тимошенко

$$0.00635\,|x_0|$$

Абсолютная погрешность значений x' для того же интервала по нашей методе не превосходит

$$0.00006p\,|x_0|,$$

а по методе С. П. Тимошенко:

$$0.00367p\,|x_0|.$$

В целях большей точности, например, для интегрирования уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

можно положить

$$y = y_0 + h\,[\alpha y_0' + \beta y_{x_0+\theta} + \gamma y'_{x_0+\theta_1}]$$

и параметры α, β, γ, θ и θ_1 найти так, чтобы выполнялось условие

$$\alpha + \beta + \gamma = 1,$$

$$\beta\theta + \gamma\theta_1 = \frac{1}{2},$$

$$\beta\theta^2 + \gamma\theta_1^{\,2} = \frac{1}{3},$$

$$\beta\theta^3 + \gamma\theta_1^{\,3} = \frac{1}{4},$$

$$\beta\theta^4 + \gamma\theta_1^{\,4} = \frac{1}{5}.$$

Хотя погрешность

$$y_{x+1} - y_x$$

будет величиной порядка h^6, однако, ввиду иррациональности чисел

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \theta \text{ и } \theta_1,$$

метода становится чрезвычайно громоздкой и аналогичные обобщения едва ли будут иметь практический интерес.

§ 5. О соотношениях между значениями функции одной переменной. Будем предполагать, что x принимает значения

$$x,\ x+h,\ x+2h,\ \ldots$$

где h достаточно малая величина. Обозначим через

$$y_x,\ y_{x+1},\ y_{x+2},\ \ldots$$

значения ординат точек некоторой интегральной кривой данного дифференциального уравнения, так чтобы абсциссами этих точек были бы соответственно:

$$x,\ x+h,\ x+2h,\ \ldots$$

Ниже мы устанавливаем между

$$x,\ y_{x-n},\ y_{x-n+1},\ \ldots,\ y_{x-1},\ y_x,\ y_{x+1},\ \ldots,\ y_{x+n} \tag{22}$$

соотношение вида:

$$y_{x+n} = \varphi[x,\ y_{x-n},\ y_{x-n+1},\ \ldots,\ y_{x-1},\ y_x,\ y_{x+1},\ \ldots,\ y_{x+n-1}], \tag{23}$$

где функция φ конечна и определена для всех рассматриваемых значений (22).

Таким образом мы приходим к алгорифму, позволяющему находить по начальным значениям

$$y_{x-n},\ y_{x-n+1},\ \ldots,\ y_{x-1},\ y_x,\ y_{x+1},\ \ldots,\ y_{x+n-1}$$

приближенные значения

$$y_{x+n},\ y_{x+n+1},\ y_{x+n+2},\ \ldots$$

без составления каких-либо таблиц разностей.

Если результаты доставляемые нашей методой, примерно, такого же порядка точности, как и методы разностей или квадратур, то процесс вычисления предлагаемой методы не сложнее методы разностей или квадратур.

После этих замечаний перейдем к выводу формул (23). При посредстве Тайлорова ряда имеем:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_{x-2} = y_x - \frac{2h}{1}y'_x + \frac{2^2h^2}{1\cdot 2}y''_x - \ldots$$

$$y_{x-1} = y_x - \frac{h}{1}y'_x + \frac{h^2}{1\cdot 2}y''_x - \ldots$$

$$y_{x+1} = y_x + \frac{h}{1}y'_x + \frac{h^2}{1\cdot 2}y''_x + \ldots$$

$$y_{x+2} = y_x + \frac{2h}{1}y'_x + \frac{2^2h^2}{1\cdot 2}y''_x + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Умножим обе части полученных разложений соответственно на множители

$$a_{x+k} \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n),$$

и просуммируем полученные результаты по всем значениям k, от $-n$ до $+n$, будем иметь:

$$\sum_{k=-n}^{k=+n} a_{x+k} y_{x+k} = y_x \sum_{k=-n}^{k=+n} a_{x+k} + H_x + O(h^{l+1}), \tag{24}$$

где H_x значение некоторой определенной функции в точке с абсциссой x, а коэффициенты a_{x+k} (непрерывные функции от x) предполагаются выбранными так, чтобы погрешность $O(h^{l+1})$ была бы возможно высокого порядка малости относительно h.

Пусть интегрируется дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y).$$

Полагая $n = 1$ и

$$a_{x-1} = a_{x+1} = 1$$

получим

$$y_{x+1} = 2y_x - y_{x-1} + h^2 f(x, y_x) + O(h^4), \tag{25}$$

где

$$O(h^4) = \frac{h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\left[y^{\mathrm{IV}}_{x+\theta_1} + y^{\mathrm{IV}}_{x-\theta_2}\right],$$

$$0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Но если положить $n = 2$ и

$$a_{x-2} = a_{x-1} = a_{x+1} = a_{x+2} = 1,$$

будем иметь

$$y_{x+2} = 4y_x - y_{x-1} - y_{x-2} - y_{x+1} + 5h^2 f(x, y_x) + \frac{17}{12} h^4 y^{\mathrm{IV}}_x + O(h^6), \tag{26}$$

где

$$O(h^6) = \frac{h^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\left[y^{\mathrm{VI}}_{x+\theta_1} + y^{\mathrm{VI}}_{x-\theta_2} + 64 y^{\mathrm{VI}}_{x+2\theta_3} + 64 y^{\mathrm{VI}}_{x-2\theta_4}\right],$$

а

$$\theta_1, \ \theta_2, \ \theta_3 \text{ и } \theta_4$$

лежат между 0 и 1.

В частности, для уравнения

$$y'' = y + \cos x$$

соотношение (26) принимает вид:

$$y_{x+2} = \left(4 + 5h^2 + \frac{17}{12}h^4\right) y_x - y_{x-1} - y_{x-2} - y_{x+1} + 5h^2 \cos x + O(h^6).$$

Множители a_{x+k} могут быть как постоянными, так и переменными. Так, например, чтоб составить зависимость (23) для интеграла I_0 уравнения Бесселя

$$x^2 I_n'' + x I_n' - (x^2 + n^2) I_n = 0,$$

полагаем

$$a_{x-1} = x - \frac{h}{2},$$

$$a_{x+1} = x + \frac{h}{2},$$

тогда получим:

$$\left(x + \frac{h}{2}\right) I_{x+1} = x(2 + h^2) I_x - \left(x - \frac{h}{2}\right) I_{x-1} + O(h^4). \tag{27}$$

§ 6. **Оценка погрешности.** Пусть

$$y_{x+k} = Y_{x+k} + \xi_{x+k} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n),$$

где ξ_{x+k} — погрешность, а Y_{x+k} приближенное значение y_{x+k}, доставляемое соотношением

$$\sum_{k=-n}^{k=+n} a_{x+k} Y_{x+k} = Y_x \sum_{k=-n}^{k=+n} a_{k+x} + H_x, \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n). \tag{28}$$

Путем почленного вычитания (28) из (24) получится:

$$\sum_{k=-n}^{k=+n} a_{x+k} \xi_{x+k} = \xi_x \sum_{k=-n}^{k=+n} a_{x+k} + O(h^{l+1}), \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n). \tag{29}$$

Оценке погрешности нашей методы предпошлем одну лемму.

Лемма. Пусть $a(x)$ и $\theta(x)$ непрерывны в промежутке (x_0, a). Пусть a_{x+k} и θ_{x+k} обозначают значения этих непрерывных функций в точке с абсциссой $x + kh$, заключенной внутри интервала (x_0, a), так что

$$x_0 \leqslant x + kh \leqslant a \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n).$$

Сверх того, пусть всюду внутри названного интервала

$$\sum_{k=-n}^{k=+n} a_{x+k} \theta_{x+k} - \theta_x \sum_{k=-n}^{=+n} a_{x+k} \leqslant 0, \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n), \tag{30}$$

а в точке x_0

$$\theta_{x_0} \geqslant 0.$$

Если значения a_{x+k} положительны в любой точке интервала (x_0, a), то

$$\theta_{x+k} \geqslant 0.$$

Предполагая значения θ в некоторых точках интервала (x_0, a) отрицательными и, называя через

$$\theta_x$$

наименьшее из этих значений, мы придем к заключению, что, при достаточно малом δ, в промежутке

$$(x - \delta,\ x + \delta)$$

неравенство (30) будет иметь обратный знак, что невозможно.

Аналогично получается, что, если в интервале (x_0, a) левая часть $(30) \geqslant 0$, а в точке x_0 названного интервала

$$\theta_{x_0} \leqslant 0,$$

то всюду внутри (x_0, a)

$$\theta_{x+k} \leqslant 0.$$

Ниже мы предполагаем значения a_{x+k} положительными и известными в любой точке интервала (x_0, a).

Пусть

$$\underline{\xi}_{x_0} \leqslant \xi_{x_0} \leqslant \overline{\xi}_{x_0}.$$

Пусть

$$\underline{\xi}_{x_0} + \tau\omega(x) \quad \text{и} \quad \overline{\xi}_{x_0} + \tau\omega(x)$$

полиномы относительно x не выше l-го порядка,

$$\omega(x_0) = 0,$$

а τ — подлежащая определению постоянная.

Так как (24) удовлетворяет любая функция, разложимая вблизи каждой точки интервала (x_0, a) в ряд Тайлора, будем иметь:

$$(31) \qquad \sum_{k=-n}^{k=+n} a_{x+k}(\xi_{x_0} + \tau\omega_{x+k}) = (\xi_{x_0} + \tau\omega_x)\sum_{k=-n}^{k=+n} a_{x+k} + \tau H_x',$$

где H_x' — значение некоторой определенной функции в точке с абсциссой x, и притом такой, что в интервале (x_0, a)

$$H_x' \neq 0.$$

Так, например, для соотношения (25)

$$H_x' = h^2\omega''(x).$$

В данном случае, внутри любой точки интервала (x_0, a) должно выполняться условие

$$\omega''(x) \neq 0.$$

Почленным вычитанием (31) из (29) немедленно находим:

$$\sum_{k=-n}^{k=+n} a_{x+k}(\xi_{x+k} - \xi - \tau\omega_{x+k}) - (\xi_x - \xi_{x_0} - \tau\omega_x) \sum_{k=-n}^{k=+n} a_{x+k} = \tag{32}$$
$$= O(h^{l+1}) - \tau H_x'$$

Разумея, что

$$\theta_{x+k} = \xi_{x+k} - \xi_{x_0} - \tau\omega_{x+k},$$

и предполагая, что в любой точке интервала справедливо неравенство:

$$O(h^{l+1}) - \tau H_x' \leqslant 0, \tag{33}$$

согласно леммы, будем иметь

$$\xi_{x+k} \geqslant \xi_{x_0} + \tau\omega_{x+k}.$$

Для выполнения неравенства (33) в интервале (x_0, a), в зависимости от представившихся случаев, достаточно положить

$$\tau = \left[\frac{O(h^{l+1})}{H_x'}\right]_{\max} \quad \text{или} \quad \tau = \left[\frac{O(h^{l+1})}{H_x'}\right]_{\min},$$

где $[\quad]_{\max}$ обозначает наибольшее значение чисел

$$\frac{O(h^{l+1})}{H_x'},$$

в интервале (x_0, a), а $[\quad]_{\min}$ обозначает наименьшее значение тех же чисел в том же интервале.

Аналогично вышеизложенному для полинома

$$\bar{\xi}_{x_0} + \tau\omega$$

предположим, что в любой точке интервала (x_0, a)

$$O(h^{l+1}) - \tau H_x' \geqslant 0.$$

В силу вышеприведенной леммы получим

$$\xi_{x+k} \leqslant \bar{\xi}_{x_0} + \tau\omega_{x+k}.$$

Для выполнения этого неравенства, в зависимости от представившихся случаев, достаточно положить:

$$\tau = \left[\frac{O(h^{l+1})}{H_x'}\right]_{\min} \quad \text{или} \quad \tau = \left[\frac{O(h^{l+1})}{H_x'}\right]_{\max},$$

где $[\quad]_{\min}$ и $[\quad]_{\max}$ имеют тот же смысл, что выше.

В силу изложенного мы приходим к заключению, что, в интервале (x_0, a), абсолютное значение погрешности ξ нашей методы интегрирования будет удовлетворять неравенству

$$|\xi| \leqslant \eta + |\omega_x|_{\max} \left|\frac{O(h^{l+1})}{H_x'}\right|_{\max},$$

где через $|\quad|_{\max}$ обозначено наибольшее значение абсолютных величин чисел

$$\omega_x \quad \text{и} \quad \frac{O(h^{l+1})}{H_x'}$$

в интервале (x_0, a) а η — значение предельной абсолютной погрешности y_{x_0}.

Полагая, например,

$$\omega = (x - x_0)^2$$

устанавливаем, что, если численное интегрирование уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y)$$

исполнить при посредстве (25), высший предел абсолютного значения погрешности ξ будут доставляться неравенством

$$|\xi| \leqslant \eta + \frac{h^2 M}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(a - x_0)^2, \tag{34}$$

где M обозначает наибольшее значение $|y^{IV}|$ в интервале

$$(x_0, a).$$

Из (34) следует, что, если взять h достаточно малой, ошибка рассматриваемого алгорифма может быть сделана как угодно малой. При $h \to 0$, $\xi_x \to 0$ и, следовательно

$$Y_x \to y_x,$$

т. е. наша метода сходится.

(34) дает возможность заключить, что ошибка состоит из двух частей, первая часть ошибки связана со степенью точности вычисления y_0, в то время как вторая — порядка h^2 ошибка алгорифма.

§ 7. **Численные примеры.** Для пояснения методы предшествующего параграфа на конкретных случаях рассмотрим несколько простых примеров.

Положим, что требуется интегрировать уравнение движения плоского маятника

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\vartheta,$$

где l длина маятника, ϑ — угол между маятником и вертикалью.

Предложенное уравнение заменой

$$x = \sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

преобразовывается в следующее:

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = -\sin\vartheta. \tag{35}$$

Пусть начальные условия таковы: при $x_0 = 0$ должно быть $\vartheta_0' = 0$, $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$. Интегрирование будем вести при ступени

$$h = 0.1.$$

При посредстве ряда Тайлора находим

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \frac{h^2}{2} + \frac{h^6}{240} - \frac{h^{10}}{192000} + \cdots \tag{36}$$

Вычисление показывает, что

$$\vartheta_1 = 1.56580.$$

Зависимость (25), если пренебречь величиной $0(h^4)$, для данного случая принимает вид:

$$\vartheta_{x+1} = 2\vartheta_x - \vartheta_{x-1} - h^2 \sin\vartheta_x. \tag{37}$$

По имеющимся значениям ϑ_0 и ϑ_1 при посредстве (37) находим ϑ_2; по значениям ϑ_2 и ϑ_3 вычисляем ϑ_4 и т. д.

Окончательный результат представится в виде таблицы:

x	ϑ	$\sin\vartheta$	x	ϑ	$\sin\vartheta$
0.0	1.57080		1.1	0.97288	0.827
0.1	1.56580	1.000	1.2	0.86270	0.760
0.2	1.55080	1.000	1.3	0.74492	0.678
0.3	1.52580	0.999	1.4	0.62036	0.581
0.4	1.49081	0.997	1.5	0.48999	0.471
0.5	1.44585	0.992	1.6	0.35491	0.348
0.6	1.39097	0.984	1.7	0.21635	0.215
0.7	1.32625	0.970	1.8	0.07564	0.076
0.8	1.25183	0.950	1.9	—0.06583	
0.9	1.16791	0.920			
1.0	1.07479	0.879			

Время достижения маятником наинизшего положения в первый раз определится из соотношения

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\,x,$$

если вычислить соответствующий корень уравнения

$$\vartheta = 0,$$

где ϑ частный интеграл уравнения (35), удовлетворяющий начальным условиям. Из нашей таблицы видно, что этот корень заключается в промежутке:

$$(1.8;\ 1.9).$$

Если теперь интервал (1.8; 1.9) разделить пополам и воспользоваться соотношением

$$\vartheta_x = \frac{\vartheta_{x-\frac{1}{2}} + \vartheta_{x+\frac{1}{2}}}{2} + \frac{h^2}{2}\sin\vartheta_x,$$

для определения ϑ_x получим уравнение Кеплера. Полагая $h = 0.05$, и решая это уравнение относительно ϑ_x, тем самым определим значение ϑ в середине интервала (1.8; 1.9), чем и выясняется, в которой половине находится корень. Этот новый промежуток снова делим пополам и т. д. Получаем довольно быстро сближающиеся значения, между которыми заключается корень предложенного уравнения, и окончательно устанавливаем, что:

$$x \approx 1.8535.$$

Наконец, значение x, доставляемое полным эллиптическим интегралом

$$x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\psi}} = 1.8541,$$

подтверждает достаточную точность наших вычислений.

Переходя к оценке погрешности полученного результата, прежде всего замечаем, что

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)^2 = 2\cos\vartheta.$$

Дифференцированием уравнения

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = -\sin\vartheta$$

имеем:

$$\vartheta^{IV} = \sin\vartheta\left[\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)^2 + \cos\vartheta\right],$$

откуда следует

$$|\vartheta^{IV}| \leqslant \frac{3}{2}|\sin 2\vartheta|,$$

и далее —

$$M \leqslant \frac{3}{2}.$$

Если положить теперь

$$\eta = 0,$$

то окажется, что

$$|\xi| \leqslant \frac{3}{2}\frac{h^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(x - x_0)^2.$$

Так, например, для интервала (0; 1) будем иметь, что

$$|\xi| \leqslant 0.00063,$$

а для интервала (0; 1.9)

$$|\xi| \leqslant 0.00226.$$

На самом деле действительная ошибка значительно меньше предельной. Было бы интересно полученное решение сравнить с точным (36).

Ряд (36) при $x = h = 1$ доставляет

$$\vartheta = 1.07496,$$

между тем как приближенное значение ϑ при $x = 1$, полученное по нашей методе, есть

$$1.07479,$$

с соответствующей погрешностью

$$0.00017,$$

что действительно меньше предельной погрешности

$$0.00063.$$

Наконец, если сделать

$$\vartheta_0 = 1.07479,$$

то согласно наших оценок для интервала (1; 1.9) будет

$$\eta_0 = 0.00063$$

а

$$|\xi| \leqslant 0.00114.$$

Итак, мы приходим к заключению, что предельная абсолютная погрешность результата численного интегрирования уравнения

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = -\sin\vartheta,$$

в интервале (0; 1.9) не превзойдет числа

$$0.00114.$$

Если в процессе численного интегрирования данного уравнения, понадобилось бы уменьшение ступени h вдвое, то значение $\vartheta_{x+\frac{1}{2}}$ получится, как корень уравнения

$$\vartheta_{x+\frac{1}{2}} = \frac{\vartheta_x + \vartheta_{x+1}}{2} + \frac{h^2}{8}\sin\vartheta_{x+\frac{1}{2}}.$$

Уравнение это можно решить хотя бы при посредстве формулы Лагранжа. Будем иметь:

$$\vartheta_{x+\frac{1}{2}} = a + \frac{h^2}{8}\sin a + \frac{h^4}{128}\frac{d}{da}(\sin^2 a) + \frac{h^6}{3072}\frac{d^2}{da^2}(\sin^3 a) + \cdots,$$

где

$$a = \frac{\vartheta_x + \vartheta_{x+1}}{2}.$$

Начальные значения

$$\vartheta_{x+\frac{1}{2}}, \quad \vartheta_{x+1}$$

позволят продолжить процесс интегрирования при половинной ступени.

В качестве второго примера рассмотрим уравнение Бесселя

$$x^2 I_n'' + x I_n' - (x^2 + n^2) I_n = 0.$$

Поставим задачей составить таблицу значений Бесселевой функции I_0 (случай чисто мнимого аргумента). Положим, что данное уравнение требуется интегрировать при граничных условиях: $x = 0$ должно быть $I_{x_0} = 1$ и при $x = 0.02$ $I_{x_0+1} = 1.0001$. Интегрирование будем исполнять по алгорифму:

$$\left(x + \frac{h}{2}\right) I_{x+1} = x(2 + h^2) I_x - \left(x - \frac{h}{2}\right) I_{x-1}.$$

Приводим вычислительную таблицу, доведенную до получения значения $I_0(0.3)$.

x	I_0 приближенное	I_0 точное	x	I_0 приближенное	I_0 точное
0.00	1.0000	1.0000	0.16	1.0064	1.0064
0.02	1.0001	1.0001	0.18	1.0081	1.0081
0.04	1.0004	1.0004	0.20	1.0100	1.0100
0.06	1.0009	1.0009	0.22	1.0121	1.0121
0.08	1.0016	1.0016	0.24	1.0144	1.0144
0.10	1.0025	1.0025	0.26	1.0169	1.0170
0.12	1.0036	1.0036	0.28	1.0196	1.0197
0.14	1.0049	1.0049	0.30	1.0225	1.0226

Ленинград.
Физико-математический институт
Академии Наук
им. В. А. Стеклова.
20 III 1934 г.

CH. MIKELADZE. SUR DE NOUVEAUX ALGORITHMES D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

RÉSUMÉ

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

aux conditions initiales données $x = x_0$, $y = y_0$. Supposons la fonction $f(x, y)$ continue et ayant une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ bornée dans le domaine D renfermant le point x_0, y_0. Soit h un nombre positif assez petit. Soit

$$x_m = x_0 + mh \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Désignons par

$$y_0, y_1 \cdots, y_m, \cdots$$

les valeurs correspondantes de y et par $y_m^{(n)}$ l'expression

$$\left.\frac{d^n y}{dx^n}\right|_{x=x_0+mh}.$$

Avec les formules de quadratures mécaniques nous obtenons:

$$y_{n+k} = y_k + h \sum_{i=0}^{n} A_i f[x_0 + (i+k)h,\ y_{i+k}] + O(h^{l+1}) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Si nous négligeons la grandeur $O(h^{l+1})$, nous pouvons d'après les valeurs initiales de

$$y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$$

calculer la valeur approchée de y_n, d'après les valeurs de

$$y_1, y_2, \cdots, y_n$$

— la valeur approchée de y_{n+1}, etc.

Le processus d'intégration est convergent et en admettant l'erreur des valeurs initiales de l'ordre de h^l ou davantage, l'erreur maxima de l'algorithme sera au moins de l'ordre l-me de petitesse par rapport à h.

La méthode est applicable aussi bien dans le cas général, c.-à.-d. pour l'intégrale d'une équation ou d'un système d'équations d'ordre quelconque.

Profitant d'une note de Dini,* nous donnons pour l'intégration numérique d'équations de second ordre des algorithmes spéciaux. Citons-en un:

$$y_{k+1} = y_k + hy'_k + \frac{h^2}{6}[y_k'' + 2y_k'' + \tfrac{1}{2}],$$

$$y'_{k+1} = y'_k + \frac{h}{6}[y_k'' + 4y_k'' + \tfrac{1}{2} + y_{k+1}''],$$

d'emploi commode pour l'integration de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y) \tag{1}$$

aux conditions initiales de $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$. Pour commencer l'application du procédé il est indispensable de calculer au préalable $y_{\frac{1}{2}}$. Le processus d'intégration est convergent et l'erreur est (au moins) du 4-me ordre de petitesse par rapport à h.

Notons enfin des algorithmes qui s'obtiennent en admettant la solution de l'équation donnée représentable en un point quelconque de l'intervalle d'integration par la formule de Taylor. Nous avons, par exemple, pour intégrer l'équation (1):

$$y_{k+1} = 2y_k - y_{k-1} + h^2 f(x_0 + kh,\ y_k),$$

avec l'estimation correspondante:

$$|\xi| < \eta + \frac{h^2 l^2 M_4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

ou ξ est l'erreur de y en les points de l'intervalle qui nous intéresse, M_4 la valeur maxima de $|y^{IV}|$ dans le même intervalle, η la valeur limite de $|\xi|$ au point x_0 et l l'étendue de l'intervalle d'intégration.

Institut Physico-mathématique
V. Stekloff de l'Académie des Sciences de l'URSS.

---

* P. Mazzoni. Sul resto di Lagrange nello sviloppo di Taylor. Rendic. del Circolo Mat. di Palermo, t. LII, 1928, p. 44—57.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

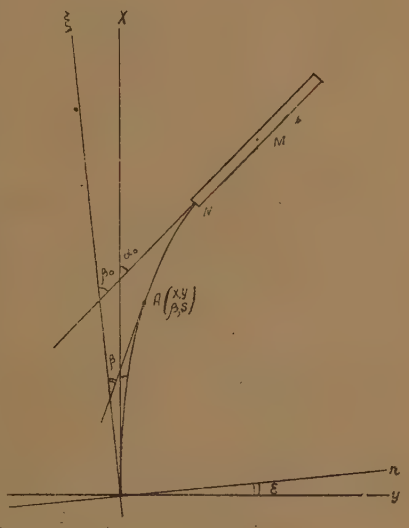
ТЕОРИЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО УПРУГОГО МАЯТНИКА

Н. А. АРТЕМЬЕВА

(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

В апреле 1933 г. директор Астрономического института Б. В. Нумеров предложил мне разработать математическую теорию вертикального упругого маятника. Такого рода маятники употребляются последнее время для измерения силы тяжести.

Вертикальный маятник представляет собой систему, состоящую из упругой прямоугольной пластинки — полоски с закрепленным нижним краем, к верхнему краю которой прикреплен твердый цилиндрический стержень относительно большой массы (фиг. 1). В положении равновесия пластинка изогнута по цилиндрической поверхности, при этом ось стержня составляет угол α_0 с вертикалью.



Фиг. 1

Маятник может совершать упругие колебания около положения равновесия в плоскости XOY.

Главнейшая задача состояла в определении периода колебаний, его зависимости от нивелировки (угла ε) и начальных условий. В этой заметке кратко указаны полученные результаты и приведены некоторые формулы, пригодные для практических расчетов.[1]

[1] Подробное изложение теории печатается в сборнике «Прикладная математика и механика». Печатаемый здесь материал представляет собой краткое изложение доклада, читанного на Астрономическом съезде в 1934 г., и предназначается для астрономов.

Кривую изгиба мы можем определять, задавая для каждого момента времени t угол α или β в функции от длины дуги s, отсчитываемой от начала координат; таким образом $\alpha = \alpha(s, t)$.

В основу теории была положена гипотеза Бернулли-Эйлера, в которой принимается, что величина потенциальной энергии изгиба П, пропорциональна квадрату кривизны $\frac{\partial \alpha}{\partial s}$, т. е.

$$\Pi = \frac{B}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}\right)^2 ds$$

где l длина пластинки, B коэффициент жесткости на изгиб.

Уравнения движения выводились из принципа Гамильтона и представляют собой интегро-дифференциальное уравнение следующего вида:

$$B\frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2} + \int_0^l [\rho(l-x) + m]\left\{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^2 \sin[\alpha(x, t) - \alpha(s, t)] - \right.$$

$$- \left.\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}\cos[\alpha(x, t) - \alpha(s, t)]\right\} dx - \int_0^l \rho(s-x)\left\{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^2 \sin[\alpha(x, t) - \alpha(s, t)] - \right.$$

$$- \left.\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t}\cos[\alpha(x, t) - \alpha(s, t)]\right\} dx + mg\sin\alpha + \tag{1}$$

$$+ am\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\Big|_{s=l}\right)^2 \sin(\alpha|_{s=l} - \alpha) - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}\Big|_{s=l}\cos(\alpha|_{s=l} - \alpha)\right] = 0$$

с граничными условиями

$$\alpha|_{s=0} = 0, \qquad B\frac{\partial \alpha}{\partial s}\Big|_{s=l} - mga\sin\alpha|_{s=l} - \tag{2}$$

$$- am\int_0^l \left\{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^2 \sin(\alpha - \alpha|_{s=l}) - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}\cos(\alpha - \alpha|_{s=l})\right\} dx + (ma^2 + J_c)\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}\Big|_{s=l} = 0$$

и начальными условиями

$$\alpha|_{t=0} = \varphi(s) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(s) \tag{3}$$

где

B — коэффициент жесткости на изгиб. Сюда входят толщина и ширина пластинки.

g — ускорение силы тяжести.

m — масса стержня.

l — длина пластинки.

$2a$ — длина стержня, таким образом a есть расстояние от конца пластинки до центра тяжести стержня.

I_c — момент инерции стержня, относительно оси, проходящей через центр тяжести стержня.

α — угол, составляемый касательной к кривой изгиба с осью.

t — время.

s — длина дуги кривой изгиба, отсчитываемая от начала координат.

ε — угол между осью Y и горизонталью (нивелировка).
$\beta = \alpha + \varepsilon$.
A — амплитуда.
τ — период колебания (полный).
h — толщина пластинки.
H — ширина пластинки.
$2r$ — диаметр стержня.
δ — плотность стержня.
ρ — плотность пластинки на единицу длины
$\lambda^2 = \frac{mg}{B}$.
E — модуль Юнга для материала пластинки.
μ — коэффициент Пуассона.
λ_1 — критическое значение λ, определяемое из уравнения $\operatorname{tg} \lambda l = \frac{1}{a\lambda}$.
ε — угол нивелировки.

Изучение уравнений равновесия показывает, что при фиксированных B, l, a и остальных величинах устойчивая форма кривой изгиба определяется следующими условиями.

I. Если $\lambda < \lambda_1$ и $\varepsilon = 0$, то устойчивым положением равновесия является вертикальная прямая.

II. Если $\lambda > \lambda_1$ $\varepsilon = 0$, устойчивая кривая изгиба выражается уравнением

$$\sin \frac{\alpha}{2} = k \sin(\lambda s)$$

где k модуль эллиптической функции.[1]

III. Если $\lambda < \lambda_1$ $\varepsilon \neq 0$ устойчивая кривая выражается уравнением

$$\sin \frac{\alpha}{2} = k \sin(\lambda s + \lambda \omega).$$[1]

Если λ значительно меньше критического значения λ_1, то влияние нивелировки, т. е. угла ε, мало сказывается на форме изгиба.

При λ близком к λ_1, угол ε заметным образом влияет на форму кривой изгиба.

Колебания, совершаемые маятником, при измерениях весьма малы, так как угол $\alpha(l, t)$ меняется в пределах от 2° до 5°. Это дает возможность изучать линейные колебания около положения равновесия. Решение линейных уравнений движения может быть представлено в общем случае, т. е. при произвольных начальных условиях, в виде ряда Фурье. Однако практическое значение имеет только первый член разложения. Такая простота движения объясняется двумя причинами: 1) начальные условия, сообщаемые маятнику в действительности таковы, что амплитуды всех членов ряда Фурье чрезвычайно малы по сравнению с первым членом; 2) если совершать предельный переход, полагая массу пластинки, или, что то же самое, $\rho = 0$, то маятник превращается в систему с одной степенью свободы.

Определение периода колебаний из линейных уравнений удалось свести к отысканию корней кубического уравнения.

[1] В этой заметке мы не приводим более подробного объяснения этих формул.

Для определения периода колебаний в зависимости от начальной амплитуды и нивелировки, мною был применен приближенный метод (принадлежащий автору), аналогичный методу Рэлея.

При этом получены сравнительно простые формулы, вполне пригодные для практического применения.

Применение этого метода к вертикальному маятнику позволило приближенно определить период колебаний с учетом нивелировки и начальной амплитуды.

Приводим численный пример: для маятника, размеры которого имеют следующие значения:[1]

h	0.015	mg	28.911
H	0.5	r	0.25
l	1.2	μ	0.3
a	8.66	ε	2.10^9
δ	8.5		
B	317 (в эту величину входит h, H, μ — коэфф. Пуассона, E — модуль Юнга)		

Период колебаний выражается формулой

$$\tau = 7.082 + 5869\,A^2 - 4\,151\,834\,\varepsilon.^2$$

Амплитуда A и нивелировка ε должны быть выражены в радиальной мере. Из этого примера видно, какое огромное влияние оказывают нелинейные члены, входящие в уравнения (1) и (2).

Обычно практикуемая замена нелинейных уравнений линейными ведет в этом случае к большой ошибке.

Интересна зависимость τ и коэффициентов при A^2 и ε^2 от λ. Для того, чтобы период сделать большим (а это как раз нужно при измерениях), надо, чтобы λ было близким к λ_1 (прочие величины зафиксированы); но когда λ приближается к λ_1, то и коэффициенты при A^2 и ε^2 начинают быстро расти. Поэтому в приборах, употребляющихся на практике (с большим периодом), поправки за амплитуду и наклонность необходимо учитывать.

Приводим здесь еще одну простую формулу, хотя и более приближенную, для определения периода колебаний:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l^2\lambda^3\,[ma\,(a+l)+I_c]}{mg\left(\frac{1}{2}\sin 2\lambda l - a\lambda\sin^2\lambda l\right)}} \cong 2\pi\sqrt{\frac{l\,[am\,(a+l)+I_c]}{B-mgl\left(\frac{2}{3}\,l+a\right)}}$$

Эта формула не учитывает амплитуды и угла ε, но тем не менее может служить для более грубых расчетов.

Она тождественна с формулой, полученной Хольвеком и Лежей эмпирическим путем.[2]

[1] Все величины даны в единицах: см, г веса, сек.

[2] Французские астрономы Хольвек и Лежей впервые применили вертикальный маятник для измерения силы тяжести.

Формула Хольвека и Лэжея имеет вид

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\gamma - g}}$$

где L приведенная длина маятника, γ приведенный коэффициент упругости.

В заключение добавим, что в подробном изложении, кроме математической теории будут приведены численные таблицы и примеры полного расчета маятника.

НИИММ при ЛГУ

N. ARTEMIEFF. LA THÉORIE DE LA PENDULE ÉLASTIQUE VERTICALE

RÉSUMÉ

Les astronomes français Holweck et Lejay ont introduit la pendule élastique verticale pour la mesure de l'accélération de gravité. L'auteur de cette note, selon la proposition de l'Institut astronomique de Leningrad, a déduit la théorie mathématique de la pendule élastique verticale. Dans cette note nous indiquons les résultats obtenus et donnons les formules approximées pour la période d'oscillation. Le rapport détaillé s'imprime dans le recueil «Applied Mathematics and Mechanies».

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЙ НА ОСНОВАНИИ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. А. АРТЕМЬЕВА

(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

В этой заметке я хочу показать, как, пользуясь методом интегральных уравнений, можно оценить величину периода колебаний, определяемого некоторым нелинейным дифференциальным уравнением.

Пусть дано нелинейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{z}(t) + k^2 z(t) = \mu f[z(t)] \tag{1}$$

где $f(z)$ функция z голоморфная вблизи точки $z = 0$, причем $f(0) = 0$. При $\mu = 0$ уравнение (1) имеет периодические решения с периодом $T = \frac{2\pi}{k}$, поэтому на основании известной теоремы Poincaré оно имеет также периодические решения при $\mu \neq 0$, но достаточно малом, периоды которых мы назовем $T + \tau$. Величина $T + \tau$ есть голоморфная функция μ и начальных условий z_0, $\dot{z}_0$, т. е. τ обладает свойством

$$\lim_{\mu \to 0} \tau = 0. \tag{2}$$

Метод Poincaré дает возможность определить τ с той или иной степенью приближения относительно μ. Метод интегральных уравнений дает возможность по величине μ и по некоторому свойству функции $f(z)$ сразу оценить[1] величину $|\tau|$.

Введем новую независимую переменную

$$s = \frac{t}{T + \tau} \tag{3}$$

Уравнение (1) примет вид

$$\frac{1}{(T+\tau)^2} \frac{d^2 z}{ds^2} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 z(s) = \mu f[z(s)] \tag{4}$$

[1] Т. е. указать некоторое положительное число $> |\tau|$ (чем меньше это число, тем лучше оценка).

или

$$\frac{d^2z}{ds^2} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (T+\tau)^2 z = \mu (T+\tau)^2 f(z) \tag{4'}$$

Период функции $z(s)$ в новой переменной s будет теперь равен 1. Искомое периодическое решение уравнения (4') при $\mu \neq 0$, очевидно удовлетворяет в новой переменной условиям периодичности

$$\left.\begin{aligned} z(0) &= z(1) \\ \dot{z}(0) &= \dot{z}(1) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Поэтому, с помощью функции Грина $\mathfrak{G}(s, \zeta)$, соответствующей оператору

$$\ddot{z}(s) + \omega^2 z(s) = 0, \quad \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (T+\tau)^2 \equiv \left(2\pi + \tau \cdot \frac{2\pi}{T}\right)^2$$

и условиям периодичности (5), наша задача может быть сведена к решению нелинейного интегрального уравнения

$$z(s) = \mu (T+\tau)^2 \int_0^1 \mathfrak{G}(s, \zeta) f[z(\zeta)]\, d\zeta \tag{6}$$

т. е. интересующее нас периодическое решение удовлетворяет этому уравнению.

Функция $\mathfrak{G}(s, \zeta)$ имеет вид

$$\mathfrak{G}(s, \zeta) = \frac{\cos \omega \left(|s-\zeta| - \frac{1}{2}\right)}{2\omega \sin \frac{\omega}{2}}$$

Пусть теперь функция $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant \alpha |z_1 - z_2| \tag{7}$$

Положим $\left|\sin \frac{\omega}{2}\right| = \frac{1}{\gamma}$, тогда

$$|\mathfrak{G}(s, \zeta)| \leqslant \frac{\gamma}{2\omega} = b \tag{8}$$

Докажем теперь следующую теорему единственности:

Если $$\mu b \alpha (T+\tau)^2 < 1 \tag{9}$$

то единственным непрерывным решением уравнения (6) является $z \equiv 0$.

Предположим противное, т. е., что уравнение (6) имеет непрерывное решение $z(s) \not\equiv 0$ в интервале $0 \leqslant s \leqslant 1$.

Пусть в некоторой точке s' интервала $[0,1]$ функция $z(s)$ достигает наибольшего значения и пусть это наибольшее значение $= \eta$, так что

$$\left.\begin{aligned} |z(s)| &\leqslant \eta \quad 0 \leqslant s \leqslant 1 \\ |z(s')| &= \eta \quad 0 \leqslant s' \leqslant 1 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Из уравнения (6) и (7) находим

$$|z(s) \leqslant \mu (T + \tau)^2 \frac{\gamma}{2\omega} |f(z)| \leqslant \mu (T + \tau)^2 b\alpha\eta \tag{11}$$

или, принимая во внимание неравенство (9)

$$|z(s)| < \eta \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1$$

что противоречит сделанному выше предположению, следовательно теорема доказана.

Сопоставляя только что доказанную теорему с теоремой существования Poincaré, которая утверждает, что при μ достаточно малом уравнение (1) или, что равносильно, уравнение (6) имеет периодическое и непрерывное решение, отличное от нуля, обладающее свойством $\lim\limits_{\mu \to 0} \tau = 0$, выводим заключение: всякое непрерывное в интервале $[0,1]$ решение, отличное от нуля, и обладающее свойством $\lim\limits_{\mu \to 0} \tau = 0$ (которое по теореме Poincaré существует) должно удовлетворять условию $\mu b\alpha (T + \tau)^2 \geqslant 1$ или $\dfrac{\mu\gamma\alpha (T + \tau)^2}{2\omega} \geqslant 1$.

Преобразуя это неравенство (при условии, что μ так мало, что $|\varepsilon| < \pi$), получим

$$\boxed{\frac{\sin \frac{|\varepsilon|}{2}}{2\pi + \varepsilon} \leqslant \mu \frac{\alpha}{2k^2}} \tag{12}$$

где $\varepsilon = \tau \frac{2\pi}{T}$.

Это неравенство дает возможность оценить величину ε при μ достаточно малом.

Приводим следующий элементарный пример:

Уравнение

$$\ddot{z} + k^2 z = \mu \sin z$$

в этом случае

$$f(z) = \sin z.$$

Неравенство Липшица (7) имеет вид

$$|\sin z_2 - \sin z_1| \leqslant |z_2 - z_1|$$

т. е. $\alpha = 1$. Пусть $k^2 = \frac{1}{2}$, тогда (12) принимает вид

$$\frac{\sin\frac{|\varepsilon|}{2}}{2\pi + \varepsilon} \leqslant \mu \tag{13}$$

Придавая μ достаточно малые значения, можем определять из последнего неравенства соответствующие границы для ε и соответственно для $|\tau|$. Решение этого неравенства должно удовлетворять условию $\lim\limits_{\mu \to 0} |\varepsilon| = 0$.

Численное решение неравенства (13) проще всего получать графическим путем с помощью номограммы или методом последовательных приближений. Для этой цели достаточно положить

$$y = 2\pi\mu + \mu x \tag{14}$$

$$z = \sin\frac{x}{2} \tag{15}$$

и построить прямую и синусоиду, определяемые уравнениями (14) и (15) в прямоугольных координатах. Наибольшее возможное значение ε соответствует той точке пересечения кривых, которая стремится к нулю вместе с μ. Когда μ стремится к нулю, отрезок, отсекаемый ею на оси y и угловой коэффициент стремятся к нулю, так что прямая поворачивается и в пределе совпадает с осью x. При очень малых μ можно принять $\sin\frac{\varepsilon}{2} \cong 2\pi\mu$. Если μ возрастает, то при некотором значении прямая проходит выше синусоиды, не пересекаясь с нею. Однако при относительно больших значениях μ нельзя утверждать, что периодическое решение существует, так как ряды, получаемые по теории Poincaré, расходятся.

Полагая в нашем примере $\mu = 0.01$ получаем для ε оценку $|\varepsilon| \leqslant 0.125$, а отсюда $|\tau| \leqslant 0.089$, если же $\mu = 0.1$, то $|\tau| \leqslant 0.97$. Отношение $\frac{\tau}{T}$, выраженное в процентах, в первом случае меньше 2%, а во втором меньше 21%.

Заметим, что совершенно таким же путем легко получить аналогичное неравенство также в том случае, когда функция f зависит еще от $\dot{z}(t)$.

НИИММ при ЛГУ. Август 1934 г.

N. ARTEMIEW. ABSCHÄTZUNG DER PERIODE VON NICHTLINEARER SCHWINGUNGEN MIT HILFE DER METHODE DER INTEGRALGLEICHUNGEN

ZUSAMMENFASSUNG

Es sei T die Periode der Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{\varepsilon} + k^2 \varepsilon = 0,$$

$T + \tau$ die Periode der entsprechenden Lösung der gestörten nichtlinearen Differentialgleichung

$$\ddot{\varepsilon} + k^2 \varepsilon = \mu f(\varepsilon)$$

wo $f(\varepsilon)$ eine holomorphe Funktion im Punkte $\varepsilon = 0$ und wobei $f(0) = 0$ ist. Nach dem Satz von Poincaré ist τ eine holomorphe Funktion von μ, dabei $\lim_{\mu \to 0} \tau = 0$. Dann entsteht die Frage: wenn μ gegeben ist, den Betrag von $|\tau|$ abzuschätzen, d. h. die möglichst kleine positive Zahl $> |\tau|$ zu zeigen.

Die Methode der Integralgleichungen führt zur Ungleichung

$$\frac{\sin \frac{|\varepsilon|}{2}}{2\pi + \varepsilon} \leqslant \mu \frac{\alpha}{2k^2}$$

wo $\varepsilon = \tau \frac{2\pi}{T}$, $|f(\varepsilon_2) - f(\varepsilon_1)| \leqslant \alpha |\varepsilon_2 - \varepsilon_1|$, deren Lösung eine Antwort auf die gestellte Frage gibt.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ОРБИТА МАЛОЙ ПЛАНЕТЫ 1036 GANYMED

И. И. ПУТИЛИНА

(*Представлено академиком* А. А. Белопольским)

I. Введение

Малая планета 1036 Ganymed* была открыта фотографическим путем 23 октября 1924 года астрономом Бааде (Baade) в Бергедорфе. В отличие от других, открываемых в настоящее время, малых планет, она обладала довольно значительною яркостью (ок. $9^m.5$) и быстрым, прямым, вместо обычного попятного, видимым движением, явившимся результатом ее близости к Земле в это время. Орбита ее оказалась сильно эксцентрической и имеющей значительную наклонность к плоскости эклиптики. — Только одна малая планета 944 Hidalgo обладает бо́льшим эксцентриситетом и наклонностью. Перигелий ее расположен внутри орбиты Марса, и в наиболее благоприятных случаях Ганимед может приближаться к Земле на расстояние до 0.3 астр. единицы, явившись, таким образом, четвертой малой планетой этого типа (после 433 Эрота, 887 Алинды и утерянного в настоящее время 719 Альберта).** Внешний вид Ганимеда был вполне звездоподобный, без какой-либо туманной оболочки, не говоря уже о хвосте, что исключало сделанное некоторыми астрономами предположение о кометной природе этого светила.

Все это вызвало среди астрономов весьма большой интерес к этой планете, вследствие чего в первую оппозицию был собран весьма большой наблюдательный материал, который и был положен в основу этой работы.

Наоборот, в последние три оппозиции, охваченные этой работой, планета была слаба (до 15^m), вследствие чего число наблюдений было невелико. Подобного рода неравномерное распределение числа наблюдений по оппозициям обусловило некоторые особенности в этой работе.

* Первоначальное ее название было: «Объект Бааде», а затем 1924 TD.

** В 1932 г. были открыты две малые планеты: 1221 Амур и 1932 HA, которые могут приближаться к Земле еще на более близкое расстояние.

II. Наблюдения

Число использованных наблюдений первой оппозиции 1924 г. определяется цифрой 872, охватывающих промежуток времени от 23 октября 1924 г. по 14 апреля 1925 г., причем в это число вошло 744 наблюдения микрометрических, 125 фотографических и 3 меридианных. Что касается наблюдений 1926, 1927 и 1928 гг., то их в моем распоряжении вначале было всего 13, с которыми были получены первоначальные нормальные места и было произведено первое исправление. Но так как при этом было обнаружено, что некоторые из наблюдений, полученных на обсерватории Иеркса, оказываются ошибочными, особенно наблюдения 1928 г., то соответствующие пластинки были по моей просьбе вновь измерены, благодаря любезности проф. Ван Бисбрёка (Van Biesbroeck), причем мне были присланы также и некоторые другие, ранее мне неизвестные наблюдения. Кроме того мною было использовано также ранее мне неизвестное наблюдение Филиппова в Алжире. Таким образом, общее число наблюдений за эти оппозиции увеличилось до 19. Все эти наблюдения фотографические.

Таблица I дает общий список всех использованных наблюдений.

ТАБЛИЦА I

(Table I)

№	Место наблюдения и наблюдатель Observatory, Observer	Число набл. Number of obsery.	Источник Authority	Сокращенн. обозначения Abbreviations
	Оппозиция 1924 г.			
1	Алжир — *Филиппов, Жековский, Лагрюла, Рейс* [Algiers — *Filippoff, Jekhowsky, Lagrula, Reiss*]	27	J. O. VIII, 107	Alg. F., J., L., R.
2	Бабельсберг — *Дикк, Павел, Струве* [Babelsberg — *Dick, Pavel, Struve*]	54	A. N. **224**, 225, 257	Bab. D., P., S.
3	Барселона — *Комас-Соля, Полит* [Barcelona — *Comas-Solá, Polit*]	5	Bull. obs. Fabra. **10**, 19	Barc.
4	Бергедо ф. — *Баade, Граффф, Круге* [Bergedorf — *Baade, Graff, Kruse*]	36	A. N. **223**, 87; **225**, 153; **227**, 123	Brg. B., G., K.
5	Безансон — *Шофардэ.* [Besançon — *Chofardet*]	17	J. O. VIII, 130	Bes.
6	Бордо — *Годар* [Bordeaux — *Godard*]	13	J. O. VIII, 64	Bord.
7	Денвер — *Гоу* [Denver — *Howe*]	122	A. J. **37**, 21	Denv.
8	Дюссельдорф — *Лютер* [Düsseldorf — *Lüther*]	1	A. N. **224**, 59	Düss.
9	Франкфурт — *Шютте* [Frankfurt — *Schütte*]	18	A. N. **223**, 24; **225**, 45	Fr.
10	Гринвич — *Кроммелин, Мертон* [Greenwich — *Crommelin, Merton*]	10	M. N. **85**, 510	Gr. C., M.
11	Гейдельберг — *Мюндлер* [Heidelberg — *Mündler*]	27	A. N. **223**, 339; **226**, 329	Heid.
12	Иоганнесбург — *Гертцшпрунг* [Johannesburg — *Hertzsprung*]	12	A. N. **226**, 27	Johann.

(Продолжение)

№	Место наблюдения и наблюдатель Observatory, Observer	Число набл. Number of observ.	Источник Authority	Сокращенн. обозначения Abbreviations
13	Казань — *Дубяго, Дюков, Дубровский* [Kasan — *Dubiago, Djukov, Dubrovsky*]	60	A. N. 224, 125; 230, 88; 231, 381	Kas. Db., Dk., Dr.
14	Копенгаген — *Бюрро, Мёллер, Винтер-Гансен* [Copenhagen — *Burrau, Möller, Vinter-Hansen*]	14	A. N. 223, 241	Cop. B., M., V. H.
15	Ла Плата — *Гартман* [La Plata — *Hartmann*]	8	A. N. 224, 243	La Pl.
16	Лейден — *Ван-ден-Бос.* [Leiden — *Van den Bos*]	21	B. A. N. 67, 69, 74	Leid.
17	Лиссабон — *Мелло-е-Симас* [Lisbon — *de Mello-e-Simas*]	67	A. N. 223, 197; 224, 63, 273	Lis.
18	Милан — *Вольта* [Milan — *Volta*]	19	A. N. 223, 87, 152, 199, 311	Mil.
19	Ликская обсерватория — *Джефферс, Туккер* [Mt. Hamilton — *Jeffers, Tucker*]	17	Lick Bull. 357, 360, 367; Письм. сообщение	Mt. H. J., T.
20	Москва — *Казанский*, изм. *Путилин* [Moscow — *Kasansky*, measur. *Putilin*]	6	A. N. 232, 133	MSC
21	Мюнхен — *Зильбернагель* [Munich — *Silbernagel*]	5	A. N. 224, 15	Mun.
22	Ницца — *Шомасс* [Nice — *Chaumass*]	23	J. O. VIII, 176	Nice
23	Портфильд — *Вильсон, Джингрич* [Northfield — *Wilson, Gingrich*]	2	Pop. Astr. 32, 24	Nf, W., G.
24	Париж — *Бонне* [Paris — *Bonnet*]	14	J. O. VIII, 24	Par.
25	Пулково — *Костинский, Окулич, Шайн* [Pulkovo — *Kostinsky, Okulicz, Schajn*]	16	A. N. 223, 119; 224, 163; 230, 270	Plk. K., O., S.
26	Сантьяго (Чили) — *Кастро* [Santiago Ch. — *Castro*]	122	A. N. 225, 323	Sant.
27	Зонненберг — *Гофмейстер* [Sonneberg — *Hoffmeister*]	15	A. N. 223, 368	Sonn.
28	Стокгольм — *Болин* [Stockholm — *Bohlin*]	3	A. N. 225, 263	Stockh.
29	Ташкент — *Субботин, Суровцов* [Tashkent — *Subbotin, Surovzov*]	26	A. N. 225, 11; 231, 173	Tshk. Sb., Sr.
30	Триест — *Пеисино* [Trieste — *Peisino*]	6	A. N. 225, 173	Trieste
31	Уккль — *Дельпорт* [Uccle — *Delporte*]	1	Pop. Astr. 32, 658	Uccle
32	Вена — *Бернгеймер, Шембор* [Vienna — *Bernheimer, Schembor*]	14	A. N. 223, 247	V. B., S.
33	Вашингтон — *Боуер* [Washington — *Bower*]	54	A. J. 36, 145	Wash.
34	Вильямс-Бей — *Ван-Бисбрёк* [Williams-Bay — *Van-Biesbroeck*]	19	A. J. 36, 84	Will. B.
	Оппозиция 1926 г.			
35	Вильямс-Бей — *Ван-Бисбрёк, Струве* [Williams-Bay — *Van Biesbroeck, Struve*]	5	A. J. 37, 51; Письм. сообщение	Will. B. V. B., S.
	Оппозиция 1927 г.			
36	Вильямс-Бей — *Ван-Бисбрёк* [Williams-Bay — *Van-Biesbroëk*]	7	Письм. сообщение	Will. B. V. B.
	Оппозиция 1928 г.			
37	Алжир — *Филиппов* [Algiers — *Filippoff*]	1	J. O. XII, 65	Alg. F.
38	Милан — *Вольта* [Milan — *Volta*]	1	Письм. сообщение	Mil.
39	Вильямс-Бей — *Ван-Бисбрёк, Чанг* [Williams-Bay — *Van Biesbroeck, Chang*]	5	Письм. сообщение	Will. B. V. B., Ch.

Некоторые приближенные наблюдения, которые не были использованы в работе, в этот список не вошли.

Московские пластинки были измерены мною на измерительном приборе Репсольда, причем для каждого измерения было взято по 7—8 опорных звезд с яркостью, по возможности близкою к яркости малой планеты с целью устранения влияния уравнения яркости. Места опорных звезд были взяты из каталогов A. G. и из фотографических каталогов Carte du Ciel с учетом собственного движения. Редукция производилась по общеизвестному методу Тернера.

III. Места звезд сравнения

При вычислениях окончательных орбит комет, с которыми настоящая работа в некоторых частях имеет много общего, обычно стремятся получить места звезд сравнения, по возможности используя все доступные каталоги звезд, имея в виду достигнуть наивысшей точности положений кометы. Это объясняется тем, что орбита кометы вычисляется в большинстве случаев по небольшому отрезку орбиты, вследствие чего малейшая неточность в положении кометы может оказать большое влияние на элементы. В случае малой планеты, орбита которой вычисляется по нескольким оппозициям, нет необходимости добиваться такой точности. Особенно это может относиться к 1036 Ганимеду, у которого в первую оппозицию имеется, как мы видели, весьма большое число наблюдений. Беря достаточно большое число наблюдений для каждого нормального места, мы можем надеяться, что влияние как случайных, так и систематических ошибок наблюдений и будет сведено к нулю и нормальные места будут обладать достаточною точностью.

Тем не менее, принимая во внимание наличие грубо-ошибочных наблюдений, у большинства из которых, как оказалось, ошибка заключалась именно в неправильно определенном месте звезды, и особенно имея в виду исследование точности наблюдений различных наблюдателей, мною был произведен пересмотр мест почти всех звезд сравнения, причем места были взяты как из тех каталогов, которые были указаны наблюдателями, так и из ряда других лучших каталогов. Только в том случае, когда необходимого каталога не оказывалось на Московской обсерватории, положение звезды бралось в том виде, как оно было дано наблюдателем.

В таблице II приведены средние места всех звезд сравнения.

ТАБЛИЦА II

(Table II)

*	α 1924.0	δ 1924.0	Источник Authority
1	$21^h14^m16^s.54$	+14°13′ 7″.9	Bord$_{00}$ +14°.765; Lpz I 8429
2	19 34.90	+13 39 21.0	*13^m.5 comp. with *3
3	19 57.75	+13 43 26.2	Bord$_{00}$ +13°.762; Lpz I 8472
4	21 12.18	+13 19 36.0	Lpz I 8483
5	24 6.77	+12 57 10.3	*11^m.0 comp with *7
6	25 18.95	+12 43 37.1	Kü 9519
7	26 8.06	+12 56 47.0	Bord$_{00}$ +12°.757; Lpz I 8522
8	30 24.98	+11 53 21.3	Lpz I 8563
9	30 43.38	+11 55 16.4	Ci 18.2802; Ci 19.4185 [μ_α −0^s.6; μ_δ −14″]
10	33 2.10	+11 31 41.7	Lpz I 8584
11	33 25.06	+11 22 39.4	Lpz I 8588; Pulk. Publ. XV. Supl. I [μ_α +0^s.22; μ_δ +0″.6]
12	33 56.67	+11 34 28.5	*11^m.3 comp with *10
13	35 21.81	+11 18 19.1	Lpz I 8607
14	36 0.19	+11 20 57.1	Tou. ph. +11°.2132.137
15	39 27.70	+10 46 41.8	Lpz I 8643
16	40 3.95	+10 45 10.8	Lpz I 8649
17	41 54.90	+10 41 28.0	Tou. ph. +11°.2140.292; Comp. with Lpz I 8663
18	43 43.44	+10 24 24.9	Lpz I 8673
19	45 6.17	+10 22 4.5	Tou. ph. +11°.2140.263
20	46 4.37	+10 3 5.2	Tou. ph. +9°.2148.12; Lpz II 10966
21	47 23.93	+10 0 48.9	Lpz II 10973
22	48 17.65	+10 2 16.5	Lpz II 10984
23	48 42.14	+ 9 28 0.8	Lpz II 10991
24	49 7.86	+ 9 46 21.9	Tou. ph. +9°.2148.58
25	49 56.96	+ 9 32 1.3	B D +9°4920 comp. with *27
26	21^h50^m 0^s.73	+9°32′ 4″.0	Tou. ph. +9°.2148.77
27	50 29.34	+9 34 4.9	Lpz II 11005 [μ_α +1^s.27; μ_δ +10″.4]
28	53 8.81	+8 56 6.9	Lpz II 11033
29	56 42.24	+8 54 50.3	Lpz II 11061
30	56 43.61	+8 25 51.9	Lpz II 11062
31	58 53.06	+8 8 55.7	Lpz II 11080
32	59 12.54	+8 17 36.2	Tou. ph. +9°.2156.132
33	59 38.37	+8 9 12.4	Tou. ph, +7°.2156.136
34	22 1 19.41	+8 4 30.3	Tou. ph. +9°.2204.186; +7°.2204.3
35	2 14.29	+7 57 53.9	Lpz II. Anh. 854
36	3 17.50	+7 52 24.0	Tou. II. 5915
37	4 2.40	+7 46 54.6	Tou. ph. +7°.2204.22; Comp. with *40
38	4 13.31	+7 34 10.1	Tou. ph. +7°.2204.26
39	4 13.35	+8 2 22.5	Lpz II 11116
40	4 38.26	+7 54 58.6	Lpz II 11118
41	4 41.24	+7 37 57.6	Tou. ph. +7°.2204.33
42	4 46.09	+7 41 55.1	Tou. ph. +7°.2204.37
43	6 41.89	+7 49 42.5	Lpz II 11139
44	7 37.95	+7 7 24.0	Tou II 5931
45	8 37.64	+7 8 34.6	Lpz II 11156
46	8 50.54	+7 1 38.1	Lpz II 11157
47	11 27.38	+6 39 0.4	Tou. ph. +7°.2212.113; Lpz II 11183
48	11 32.70	+6 40 41.2	Lpz II 11186
49	16 58.59	+6 34 14.6	Lpz II 11220
50	17 11.14	+6 22 28.6	Lpz II 11225
51	17 11.52	+5 58 53.0	Lpz II 11226
52	17 47.28	+5 56 1.1	Tou. ph. +5°.2220.7
53	17 55.20	+6 34 49.1	Lpz II 11232
54	18 45.40	+6 5 22.6	Lpz II 11238

(Продолжение)

*	α 1924.0	δ 1924.0	Источник Authority
55	$22^h19^m41^s.99$	+6° 9′23″.3	Lpz II 11250
56	19 49.65	+5 34 23.0	Lpz II 11253
57	25 45.46	+5 15 7.6	Abb 12770; Kü 9967; Alb 7779; Lpz II 11283
58	26 1.46	+5 5 52.6	*12″ comp. with *57
59	26 17.46	+4 24 36.9	Abb 12775; Alb 7782
60	29 43.81	+4 19 17.3	Kü 9997
61	30 45.22	+4 20 47.2	Tou. II. 6033; comp. with *60
62	31 45.78	+4 59 3.0	Ci 18.2937; Abb 12870; Alb 7817 [$\mu_\alpha = +2^s.7$; $\mu_\delta = -19''$]
63	32 46 27	+4 10 38.5	Tou. ph. +5°2228.162; comp. with Alb 7821
64	33 59.19	+4 2 57.7	Abb 12851
65	35 24.46	+4 1 32.2	Abb 12861; Alb 7837
66	37 25.85	+3 51 42.4	Alb 7846
67	39 58.57	+3 28 52.4	Ci 18.2960; Abb 12899; Alb 7859; Mod 1239 [$\mu_\alpha = +1^s.06$; $\mu_\delta = +34''.6$]
68	41 18.39	+2 58 22.6	Abb 12911
69	41 29.88	+3 17 26.0	Abb 12916; Alb 7869; Mod 1240
70	42 26.05	+3 22 45.8	Alb 7873
71	44 12.60	+3 7 25.2	*10″.5 comp. with *72
72	45 4.90	+3 6 29.6	Abb 12944; Alb 7887
73	45 36.04	+2 50 25.1	Alb 7889
74	46 6.56	+2 56 48.6	Bo VI. +2°4568
75	47 21.35	+2 27 51.3	Abb 12961; Alb 7897
76	49 13.95	+2 6 20.6	Mü 31711
77	49 32.41	+2 22 46.9	B D +1°4659 comp. with *78
78	22^h50^m 1^s.23	+2°22′45″.4	Kü 10138; Abb 12983
79	52 25.33	+2 13 18.1	*9″.8 comp. with *78
80	52 59.81	+2 11 57.0	Wien 1924.9
81	53 44.96	+2 4 42.0	Wien 1924.9
82	56 21.27	+1 59 59.7	Alb 7936
83	57 43.91	+1 26 55.9	Abb 13040; Alb 7945
84	59 3.02	+1 48 54.1	Alb 7953
85	23 0 39.04	+1 11 20.5	Abb 13070; Nic 5776
86	1 24.24	+0 53 49.3	Nic 5779; Mod 1260 [$\mu_\alpha = 0^s.00$; $\mu_\delta = -2''$]
87	1 34.38	+1 21 17.0	Nic 5780; Alb 7968
88	1 44.71	+1 6 6.5	Alg.ph.0°2304.10
89	4 33.35	+0 48 52.4	B D +0°4968 comp. with *86
90	5 57.90	+0 49 2.7	Alg.ph.0°2304.71
91	6 2.03	+0 48 50 0	Alg.ph.0°2304.73
92	6 15.43	+0 16 35.5	Ci 19.4503 [$\mu_\alpha = +1^s.0$; $\mu_\delta = -9''$]
93	6 28.52	+0 45 26.9	Alg.ph.0°2304.80
94	9 17.70	+0 22 50.6	Alg. ph.: 0°2304.128, 0°2312.4
95	9 35.19	+0 31 2.2	Alg. ph.: 0°2304.132, 0°2312.5; Abb 13139; Par 34353; Nic 5795; Mod 1260 [$\mu_\alpha = -0^s.55$; $\mu_\delta = -3''.5$]
96	11 56.20	—0 27 17.3	Nic 5799
97	12 4.79	+0 15 16.6	Nic 5800
98	14 13.35	+0 4 45.0	Abb 13173; Nic 5803; comp. with *99
99	14 26.70	+0 6 33.0	Abb 13176; Nic 5805
100	14 33.39	+0 6 13.1	Nic 5806
101	15 20.79	—0 8 2.8	Alg. ph. comparison star.

(Продолжение)

*	α 1924.0	δ 1924.0	Источник Authority
102	$23^h16^m22^s.29$	−0°14′28″.4	Alg. ph.: 0°.2316.89; Alb 11005
103	16 49.66	−0 15 25.2	Alg.ph.0°.2320.21
104	18 48.55	−0 19 30.1	Alg.ph.0°.2320.31
105	19 19.51	−0 15 57.4	Alg.ph 0°.2320.32
106	19 37.88	−0 7 35.2	Nic 5815. [$\mu_\alpha = +0^s.43$; $\mu_\delta = -0''.1$]
107	21 30.49	−0 37 59.6	Alg. ph. −1°.2324.2; Abb 13229; Nic 5820
108	22 14.17	−0 39 22.8	Alg. ph. −1°.2324.6.
109	27 7.91	−1 0 54.8	Abb 13264; Nic 5839
110	28 26.41	−1 14 19.5	*10.5 comp. with *112
111	28 48.82	−1 12 12.4	Alg. ph.: −1°.2324.91; −2°.2328.35
112	28 52.92	−1 15 45.5	Alg. ph.: −1°.2324.92; −2°.2328.36; Abb 13273; Nic 5812
113	29 45.09	−1 28 13.6	Nic 5847
114	29 57.17	−1 11 48.4	Nic 5848
115	33 16.58	−1 32 11.6	Alg. ph.: −1°.2324.68; −2°.2328.76. −2°.2336.2 Nic 5857
116	33 22.20	−1 28 14.7	Alg. ph.: −1°.2322.69, −2°.2328.77, −2°.2336.3; Nic 5858; Str 8099
117	33 32.00	−1 34 59.0	Alg. ph.: −1°.2332.71
118	34 12.53	−1 45 23.9	Abb 13317; Nic 5859; Str 8103
119	36 36.60	−1 46 59.3	Alg. ph.: −1°.2332.94, −2°.2336.27; SF. ph.: −3°.2332.206; Abb 13341; Nic 5870; Str 8116
120	$23^h36^m50^s.57$	−1°47′54″.7	Alg. ph.: −1°.2332.97, −2°.2336.32
121	38 27.57	−1 55 19.5	Str 8120
122	39 13.27	−2 3 42.1	Str 8122
123	41 30.48	−2 22 0.8	Abb 6032; Str 8128
124	43 35.14	−2 34 21.2	Str 8137
125	43 38.37	−2 12 45.7	Alg. ph. −2°.2344.62
126	43 42.75	−2 21 36.5	SF. ph. −3°.2340.186
127	46 39.50	−2 29 19.1	SF. ph. −3°.2348.30; comp. with *128
128	47 15.84	−2 21 28.9	Str 8151
129	48 41.16	−2 47 26.3	Str 8158
130	50 44.99	−2 22 7.9	Str 8169 [$\mu_\alpha = +0^s.03$; $\mu_\delta = +2''.3$]
131	52 12.52	−3 5 49.6	Str 8174
132	53 10.43	−3 2 10.1	Str 8177
133	54 19.07	−3 5 17.4	SF. ph. −3°.2356.17
134	55 37.44	−3 16 1.2	Str 8186
135	58 8.79	−3 11 22.4	SF. ph. −4°.0000.16; Abb 7423; Str 8196; [$\mu_\alpha = +0^s.0$; $\mu_\delta = -3''.9$]
136	58 14.68	−3 14 26.4	SF. ph.: −3°.2356.104, −4°.0000.17
137	58 53.46	−3 20 21.2	Brüss 10769; Str 8198
138	0 7 16.08	−3 44 38.0	Abb 27; Par 109; Str 30; [$\mu_\alpha = +0^s.08$; $\mu_\delta = +1''.3$]
139	7 40.72	−3 30 2.8	Str 33; [$\mu_\alpha = +1^s.08$; $\mu_\delta = +0''.0$]
140	9 1.83	−3 48 14.8	Str 37
141	10 35.37	−3 54 45.7	SF. ph. −4°.0008.94
142	11 14.21	−3 45 22.1	SF. ph. −4°.0008.102

(Продолжение)

*	α 1924.0	δ 1924.0	Источник Authority
143	$0^h11^m34^s.05$	—4° 4′36″.0	Str 45
144	13 29.06	—4 7 58.8	SF. ph.: —4°0008.137; —4°0016.8
145	17 34.57	—4 3 59.0	War 50; Str 69
146	18 39.88	—4 11 21.3	Str 73
147	20 17.85	—4 10 17.6	SF. ph.: —4°0016.145, —5°0020.79
148	20 40.26	—4 12 8.4	SF. ph: —4°0016.152, —0°0020.86
149	21 10.48	—4 20 3.3	SF. ph.: —4°0016.163, —5°0020.103
150	21 33.40	—4 24 52.1	Str 90
151	23 4.20	—4 23 1.7	SF. ph.: —4°0024.23, —5°0020.142; Str 93
152	23 49.04	—4 21 15.8	SF. ph.: —4°0024.31, —5°0020.162
153	25 45.49	—4 26 3.3	Str 102
154	26 9.60	—4 22 37.2	12 Ceti; BJ; N. A; Boss 90 [μ_α + 0″.05; μ_δ — 0″.7]
155	27 39.53	—4 41 52.5	Abb 122; Str 108
156	29 18.86	—4 16 2.3	Str 113
157	29 32.35	—4 27 43.0	Abb 129; War 83; Str 114
158	31 48.33	—4 34 15.0	SF. ph. —5°0028.116
159	32 15.13	—4 37 48.2	Anon. comp. with *160
160	35 15.57	—4 35 36.6	Str 130
161	35 16.96	—4 24 37.2	Str 131
162	36 46.14	—4 45 44.8	Str 140
163	36 50.18	—4 46 7.2	Boss 137; Str 141; SF. ph. —5°0036.54; [μ_α — 0″.14; μ_δ — 1″.0]
164	37 00.32	—4 40 6.6	Str 142
165	37 33.28	—4 52 37.0	SF. ph. —5°0036.75
166	$0^h37^m48^s.85$	—4°52′33″.8	SF. ph. —5°0036.82
167	40 1.71	—4 49 2.7	SF ph. —5°0036.109
168	40 27.33	—4 48 53.1	SF. ph. —5°0036.114; Str 155
169	42 25.75	—4 55 33.7	SF. ph. —5°0044.15
170	42 48.45	—4 50 11.5	Ci 18.102; Str 165 [μ_α + 0″.25; μ_δ — 25″.5]
171	43 41.25	—4 51 32.9	SF. ph. —5°0044.34
172	43 46.70	—4 54 45.1	Str 170
173	48 33.63	—4 58 56.3	BD — 5°128 comp. with *174
174	49 48.89	—4 56 17.0	SF. ph. —5°0052.7; Str 194
175	49 55.91	—4 52 36.0	SF. ph. —5°0052.8
176	51 24.32	—5 2 9.9	SF. ph. —5°0052.25
177	51 56.12	—4 56 37.7	SF. ph. —5°0052.38
178	53 10.58	—4 59 40.3	SF. ph. —5°0052.60
179	54 1.50	—4 39 16.2	Str 206
180	55 49.48	—4 52 2.0	Str 215
181	55 50.56	—4 43 52.5	Str 216
182	57 10.35	—5 3 22.0	Abb 255; Str 223
183	57 25.98	—4 49 21.2	Str 225
184	57 37.51	—4 50 35.9	Str 227
185	58 21.52	—5 5 56.9	SF. ph.: —5°0100.18; —6°0056.67
186	59 11.30	—5 1 17.2	SF. ph. —5°0100.33
187	59 11.84	—5 14 34.0	Boss 228; Str 230, [μ_α — 0″.76; μ_δ — 10″.1]
188	59 40.64	—5 8 12.7	*11″.6 comp. with *187
189	59 59.78	—5 1 13.2	SF. ph. —5°0100.55; comp. with *188

(Продолжение)

*	α 1924.0	δ 1924.0	Источник Authority
190	$1^h00^m30^s.84$	—5° 0′15″.6	SF. ph. —5°.0100.68
191	2 54.23	—5 3 21.6	Abb 281; Str 244
192	3 22.63	—4 56 31.6	SF. ph. —5°.0100.129
193	3 53.07	—5 8 59.5	Str 253
194	3 54.95	—4 59 22.3	SF. ph. —5°.0100.140
195	5 2.13	—5 7 34.3	Str 256
196	7 22.49	—4 53 53.7	SF. ph. —5°.0108.29
197	7 27.23	—4 50 25.2	Abb 304; Str 267
198	7 38.59	—4 58 23.3	SF. ph.: —5°.0108.36; comp. with *200
199	8 10.94	—5 0 20.9	SF. ph.: —5°.0108.41, —6°.0104.107
200	8 17.66	—4 53 46.5	SF. ph.: —4°.0104.136, —5°.0108.44, —6°.0104.109; Str 271
201	9 38.02	—5 0 48.8	SF. ph. —5°.0108.62
202	10 0.85	—5 14 56.3	Abb 315
203	10 15.44	—4 54 14.2	SF. ph. —5°.0108.75
204	10 18.26	—5 4 30.7	SF. ph. —5°.0108.77
205	10 32.58	—4 55 23.5	SF. ph. —5°.0108.82
206	11 47.90	—4 59 50.8	Str 284
207	14 8.98	—4 44 10.7	Str 294
208	14 46.41	—5 3 56.3	SF. ph. —5°.0116.17
209	15 19.84	—5 3 23.3	SF. ph. —5°.0116.23
210	15 47.24	—4 50 32.1	SF. ph. —5°.0116.31
211	17 34.48	—4 58 17.4	SF. ph. —5°.0116.49
212	18 16.61	—4 57 42.2	SF. ph. —5°.0116.62; Abb 353; Str 307
213	20 43.38	—4 46 23.7	SF. ph. —5°.0116.95
214	$1^h22^m29^s.29$	—5° 3′53″.6	Ci 18.193; Str 326; [μ_α — 0″.74; μ_δ — 10″.2]
215	23 58.53	—4 51 43.3	Str 331
	α 1925.0	δ 1925.0	
216	$1^h20^h13^s.18$	—4°31′10″.3	Str 318
217	21 15.14	—4 32 54.2	Str 321
218	24 1.55	—4 51 24.7	Str 331
219	25 35.21	—4 31 22.9	Str 336
220	25 53.99	—4 29 29.6	Str 339
221	30 53.12	—4 58 6.2	Str 360
222	31 27.51	—4 40 53.1	SF. ph.: —4°.0128.131; —5°.0132.36
223	32 55.42	—4 41 3.5	Abb 429; Str 370
224	33 25.95	—4 31 30.3	SF. ph.: —4°.0128.173, —4°.0136.6, —5°.0132.66; Str 373
225	33 46.63	—4 43 40.5	SF. ph. —5°.0132.72
226	35 50 04	—4 37 13.2	SF. ph.: —4°.0136.31, —5°.0132.98
227	35 53.23	—4 40 26.5	SF. ph. —5°.0132.99
228	36 36.04	—4 50 31.6	Str 384
229	39 1.25	—4 43 21.0	Str 398
230	39 43.18	—4 40 16.6	Str 400
231	41 20.96	—4 25 14.9	SF. ph. —5°.0140.71
232	42 10.71	—4 36 11.0	Str 406
233	44 37.79	—4 22 52.2	SF. ph. —5°.0140.131
234	45 18.32	—4 20 10.1	Abb 488
235	45 51.28	—4 6 45.1	Str 416
236	46 12.56	—4 4 17.8	Str 419
237	46 14.96	—4 29 48.4	Str 421
238	46 42.16	—4 3 59.0	Str 422
239	47 40.84	—4 35 20.5	Str 425 [μ_α + 0″.91; μ_δ — 6″.6]

(Продолжение)

*	α 1925.0	δ 1925.0	Источник Authority
240	1^h48^m 5.64	—4° 2'31.8	Str 427
241	48 22.38	—4 12 44.2	SF. ph. —4°0141.95
242	48 50.42	—4 17 38.4	SF. ph. —4°0144.103
243	50 26.64	—4 9 39.1	SF. ph. —5°0148.80
244	51 24.94	—4 6 50.5	SF. h. —4°0 52.35
245	51 42.13	—4 12 25.8	SF ph.: —5° 0148.102; —4°0152.41
246	51 42.28	—4 5 32.4	SF. ph.: —5°0148.103; —4°0152.42
247	51 45.20	—4 5 5.7	SF. ph.: —5°0148.105, —4°0152.44
248	52 9.01	—3 39 11.5	Str 444
249	52 26.46	—3 59 48.0	SF. ph. —4°0152.56
250	52 57.86	—4 3 27.1	Anon. comp. with *246, *247, *251 and SF. ph. —5°0148.106
251	54 8.46	—4 4 34.2	SF. ph. —5°0156.10, Abb 530, Str 452
252	55 49.26	—3 52 44.6	SF. ph. —3°0156.32, Str 462
253	56 27.64	—3 43 52.3	Str 469
254	56 49.87	—4 0 39.3	SF. ph. —5°0156.47
255	58 6.25	—3 52 44.9	BD —4°319 comp. with *253
256	2 1 24.30	—3 51 50.5	Str 496
257	2 1.65	—4 11 49.8	Str 497
258	5 1.38	—3 33 39.1	SF. ph. —3°0204.68; Abb 586; Str 510
259	5 20.48	—3 47 13.4	Str 511
260	6 47.25	—3 45 58.0	Str 513
261	7 2.36	—3 10 19.0	Str 514
262	7 17.27	—3 30 25.7	SF. ph.: —3°0204.107; —4°0208.58
263	2^h 8^m 7.36	—3°34' 0.3	SF. ph. —3.0204.120, Abb 603; Str 523
264	9 54.60	—3 22 54.7	SF. ph. —3°0212.11; Abb 606; Str 532
265	9 58.40	—3 23 52.9	SF. ph. —3°0212.13
266	12 12.28	—3 16 15.7	SF. ph. —3°0212.57
267	13 1.62	—3 17 1.5	SF. ph. —3°0212.74
268	13 2.23	—3 15 7.3	SF. ph. —3°0212.75; Abb 626; Str 550
269	14 6.35	—3 8 0.6	Str 553
270	15 33.38	—3 19 3.2	Boss 530; Str 562 [μ_α — 0.01; μ_δ — 23.7]
271	15 41.07	—3 18 38.4	Str 563 [μ_α — 0.02; μ_δ — 1.0]
272	17 49.72	—3 18 12.2	Str 572
273	19 16.67	—2 52 55.1	SF. ph. —3.0220.35
274	20 43.38	—2 49 17.5	SF. ph. —3°0220.68
275	21 4.59	—2 27 2.9	Str 583
276	21 10.91	—3 7 7.9	Boss 547, Str 585 [μ_α + 0.07] μ_δ — 0.5]
277	21 46.76	—2 48 30.4	SF. ph. —3°0220.87; Str 589
278	22 9.20	—2 47 19.1	SF. ph. —3°0220.93
279	22 26.76	—3 1 13.2	Str 590
280	22 28.87	—2 50 20.4	SF. ph. —3°0220.104
281	22 38.71	—2 36 35.6	Str 592
282	22 40.52	—2 50 53.1	SF. ph. —3°0220.111
283	23 40.85	—3 3 28.0	Str 595
284	25 46.24	—2 40 58.8	SF. ph. —3°0228.10
285	25 54.86	—2 36 3.0	Abb 1169; Str 603
286	26 16.53	—2 43 35.4	Abb 1173; Str 604 [μ_α + 0.72; μ_δ — 11.5]

(Продолжение)

*	α 1925.0	δ 1925.0	Источник Authority
287	$2^h26^m25^s.59$	—2°39′39″.0	SF. ph. —3°.0228.20
288	29 38.12	—2 23 39.0	SF. ph. —3°.0228 92; Alg. ph. —2°.0232.97
289	32 5.32	—2 16 5.4	Str 627
290	35 29.88	—2 13 26.6	Str 646
291	36 52.82	—2 14 45.0	Str 651
292	37 26.80	—2 11 36.0	BD — 2°.472 comp. with *291
293	37 41.93	—2 6 27.8	Alg. ph. —2°.0232.177
294	38 1.49	—2 1 00.0	SF. ph. —3°.0236.131
295	38 38.26	—1 38 29.2	Str 657
296	40 51.88	—2 16 42.2	Str 664
297	42 59.42	—1 57 38.0	Str 668
298	44 39.28	—1 35 43.7	Str 674; Nic 582
299	45 12.09	—1 42 30.6	Alg. ph. —1°.0244.134
300	47 42.89	—1 9 4.4	Abb 1359; Nic 597
301	51 52.71	—1 5 19.8	Abb 1397; Nic 613
302	53 14.52	—1 12 8.3	Alg. ph. —1°.0252.79; comp. with *304
303	53 21.04	—0 52 34.9	Nic 621 [μ_α — 0.03; μ_δ — 1.3]
304	53 25.23	—1 6 4.4	*$11^m.5$ comp. with *303
305	55 48.36	—0 55 29.4	Alg. ph. —1°.0252.45; Nic 629
306	56 3.66	—0 58 37.7	Alg. ph. —1°.0252 101; Nic 631
307	56 16.62	—0 58 45.6	Alg. ph. —1°.0252.102; Nic 634
308	56 34.65	—1 3 44.0	Alg. ph. —1°.0252.103
309	58 3.30	—1 12 50.7	Nic 644
310	58 31.50	—0 56 48.1	Alg. ph. —1°.0300.61
311	3 1 7.75	—0 33 46.0	Nic 652
312	3 1 57.80	—0°48′22″.8	Alg. ph. —1°.0300.31
313	2 22.37	—0 52 41.0	Nic 656
314	3 51.04	—0 49 30.8	Nic 664
315	3 53.44	—0 26 20.8	Nic 666
316	4 15.34	—0 39 47.0	*$11^m.5$ comp. with *314
317	7 50.85	—0 46 32.8	Nic 674
318	7 54.17	—0 20 27.2	Alg. ph. 0°.0304.149, —1°.0308.23
319	8 16.53	—0 22 20.1	Alg. ph. 0°.0304.157, —1°.0308.33; Nic 678
320	8 19.58	—0 31 36.4	Abb 1542; Nic 680
321	9 5.31	—0 39 53.7	Nic 685
322	9 30.95	—0 6 21.7	Nic 687
323	10 37.42	—0 36 18.3	Nic 691
324	12 21.75	+0 11 10.9	Nic 700
325	13 33.24	—0 26 6.9	Nic 706
326	15 32.08	—0 13 45.9	Nic 709
327	17 20.91	+0 16 39.4	Nic 720
328	19 29.25	+0 17 41.3	*$10^m.6$ comp. with *329
329	19 48.16	+0 28 25.8	Nic 729
330	20 1.80	+0 19 35.0	Alg. ph. 0°.0320.33
331	20 2.90	+0 17 5.0	Alg. ph. 0°.0320.34
332	20 46.11	+0 4 11.3	Nic 730
333	21 29.62	+0 17 54.1	Alg. ph. 0°.0320.49
334	23 52.62	+0 26 33.9	Alg. ph. 0°.0320.75
335	26 21.27	+0 27 55.1	Nic 748
336	26 22.13	+0 49 6.6	Nic 749
337	27 27.34	+0 36 1.0	Alg. ph. 0°.0328.13
338	30 50.72	+0 40 33.1	Nic 764
339	31 55.15	+0 57 22.2	Alg. ph. 0°.0328.36
340	31 59.01	+0 46 7.2	Alg. ph. 0°.0328.37
341	33 6.56	+0 40 29.6	Nic 771

(Продолжение)

*	α 1925.0	δ 1925.0	Источник Authority	*	α 1925.0	δ 1925.0	Источник Authority
342	$3^h33^m12^s.74$	+1° 2′35″.5	*10″.0 comp. with *343	354	$4^h5^m21^s.69$	+2°27′25″.2	Alb 1207
343	33 21.75	+1 6 9.4	Nic 773	355	7 50.68	+2 26 0.4	Alb 1218
344	34 52.45	+1 4 30.8	Alg. ph. 0°.0336.31	356	8 52.26	+2 33 58.6	Abb 2028; Alb 1225
345	39 19.78	+1 17 0.4	BD +1°.652 comp. with *346 and *347	357	10 34.67	+2 49 39.6	Ci 18.563; Alb 1234 [μ_α +0″.54; μ_δ +28″.2]
346	41 21.96	+1 14 2.7	Nic 800	358	11 11.50	+3 3 32.0	Alb 1241
347	42 12.58	+1 9 43.9	Nic 804	359	11 40.95	+2 52 41.8	Anon comp. with $^1/_2$ (Abb 2036 + + Alb 1230) and $^1/_2$ (Abb 2043 + + Alb 1234)
348	47 57.17	+1 54 26.1	Alb 1128				
349	49 18.09	+1 42 26.5	Alb 1132				
350	50 49.02	+1 52 10.6	Abb 1888; Mod 183				
351	52 25.20	+1 59 24.4	Abb 1897; Alb 1148; Mod 184	360	13 7.22	+2 56 26.7	Abb 2073; Alb 1253
				361	14 48.42	+2 58 4.8	Alb 1265
352	52 29.49	+2 14 56.2	Abb 1898; Alb 1149	362	18 34.27	+3 14 3.8	Alb 1286
				363	23 22.00	+3 19 21.4	Alb 1309
353	4 3 52.23	+2 31 37.1	Alb 1201	364	33 19.12	+3 41 36.0	Abb 2267

IV. Сравнение наблюдений с эфемеридой. Образование нормальных мест

Для сравнения наблюдений 1-й оппозиции с эфемеридой и образования нормальных мест мною была использована лучшая в то время система элементов, вычисленная Штракке (Stracke) на основании наблюдений 1924 г.: октябрь 23 (Бергедорф), ноябрь 8 (Милан, Гейдельберг, Франкфурт) и ноябрь 27 (2 наблюдения Бергедорф.).[1] Эти элементы предполагалось сначала использовать для исправления, но впоследствии был применен другой метод, и эти элементы послужили только для образования первых четырех нормальных мест.

Эти элементы следующие:

T: 1924 Nov. 1.5

M_0	7°43′27″.9			
ω	130 35 43.8		35′43″.1	
Ω	216 26 19.0	1924.0	27 9.9	1925.0 (a)
i	26 9 4.0		9 3.7	
φ	32 37 35.5			
μ	815.063			
lga	0.425876			

[1] Astr. Nachr., 223, 151.

ТАБЛИЦА III

(Table III)

1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
№	Ср. время Гринвич Greenwich Mean T.	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δα	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δδ	Вес Weight	Вес Weight	№	Ср. время Гринвич Greenwich Mean T.	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δα	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δδ	Вес Weight	Вес Weight
				1924 г.											
				Октябрь											
				October											
1	23.30940	Brg. B.	ph.	+0ᵐ.06	—0ˢ.1	4	2	28	28.62387	Will. B.	9	—0ᵐ.24	—0ˢ.6	4	4
2	24.29072	»	»	—0.11	—3.0	4	4	29	29.23995	Bab. P.	12	—0.32	—1.0	4	4
3	45953	Brg. G.	»	—0.10	—2.4	4	4	30	24483	Alg. L.	ph.	—0.24	—0.7	4	4
4	46811	»	»	—0.07	—3.2	4	2	31	25164	Bab. D.	12	—0.34	—1.2	4	4
5	25.26288	Heid.	1	—0.09	—2.9	4	2	32	29867	Brg. K.	11	—0.24	—0.7	4	4
6	26630	Brg. K.	1	—0.21	—2.2	4	4	33	38196	Alg. J.	ph.	—0.21	—0.3	4	4
7	26958	Bab. D.	1	—0.20	—2.5	4	4	34	56578	Sant.	11	—0.23	—0.9	4	4
8	36885	Alg. R.	ph.	—0.67	+5.1	1/2	1/2	35	56578	»	13	—0.23	—1.8	4	4
9	40469	»	ph.	—0.62	+5.9	1/2	1/2	36	58079	Wash.	14	—0.22	—0.5	4	4
10	26.23132	Bab. D.	2	—0.26	—1.7	4	4	37	30.29749	Alg. L.	ph.	—0.20	+0.1	2	4
11	26575	Brg. K.	3	—0.37	—2.0	2	4	38	30245	Bab. D.	15	—0.36	—2.2	4	4
12	28036	Cop. V. H.	4	—0.34	—2.8	2	4	39	30883	MSC.	ph.	—0.16	—1.3	2	4
13	29291	Cop. M.	4	—0.25	—2.3	4	4	40	31800	Bab. P.	15	—0.29	—3.2	4	1
14	30916	Alg. J.	ph.	—0.26	—0.9	4	4	41	35275	Gr. M.	ph.	—0.23	—0.3	4	4
15	32162	»	ph.	—0.24	—1.1	4	4	42	50604	La Pl.	ph.	—0.32	—0.3	4	4
16	35506	Stockh	3,p	—0.04	—1.0	1	4	43	54184	Sant.	16	—0.16	—1.2	2	4
17	65831	Will. B.	ph.	—0.24	—1.5	4	4	44	54184	»	15	—0.32	—1.8	4	4
18	27.21439	Bab. P.	5	—0.23	0.0	4	4	45	73640	M. H. J.	17	—0.24	+1.6	4	1
19	23200	Bab. D.	5	—0.23	—0.2	4	4	46	31.17212	Tshk. Sr.	18	—0.18	—2.0	2	2
20	33394	Alg. F.	ph.	—0.25	—0.6	4	4	47	25926	Alg. L.	ph.	—0.25	—0.5	4	4
21	37549	»	ph.	—0.26	—0.6	4	4	48	51036	Wash.	19	—0.25	—1.3	4	4
22	43058	Brg. K.	7	—0.19	—0.7	4	4	49	52589	Nf. W.	ph.	[—8.40]	[—1′35″.9]	0	0
23	47158	Uccle	ph.	+0.15	[—10.9]	1/2	0	50	56754	Sant.	22	—0.10	+0.8	1	2
24	50660	Will. B.	6	—0.30	—1.6	4	4	51	56754	»	21	—0.02	+2.8	1	1
25	28.47776	Gr. M.	ph.	—0.28	—0.8	4	4	52	56754	»	20	—0.12	—2.7	1	1
26	57227	Sant.	8	—0.51	—1.7	1	4	53	65760	M. H. J.	20	—0.18	—1.0	2	4
27	57227	»	9	—0.25	—0.5	4	4								
				Ноябрь											
				November											
54	1.14149	Tshk. Sb.	ph.	—1ᵐ.08	—1ˢ.4	1/2	4	57	1.29234	Bab. P.	24	—0ᵐ.65	+0ˢ.6	1	4
55	15765	»	ph.	—0.83	+0.2	1/2	4	58	46906	Lis.	25	—0.98	+2.1	1/2	2
56	28017	Brg. B.	ph.	—0.05	—0.3	1	4	59	52251	Will. B.	26	—0.48	—0.9	1	4

(Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
№	Ср. время Гринвич Greenwich Mean T.	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δα	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δδ	Вес Weight	Вес Weight	№	Ср. время Гринвич Greenwich Mean T.	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δα	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δδ	Вес Weight	Вес Weight
60	1.54068	Sant.	23	—0ˢ.14	—1″.2	1	4	97	4.51924	Wash.	37	—0ˢ.34	—0″.5	4	4
61	54068	»	27	—0.27	—3.2	4	1	98	56709	»	38	—0.30	+0.2	4	4
62	60130	Nf. G.	ph.	—0.26	+0.2	4	4	99	58031	»	42	—0.33	+0.2	4	4
63	2.26363	Alg. L.	ph	—0.30	+0.8	4	4	100	59015	»	41	—0.30	+0.2	4	4
64	33891	Plk. S.	ph.	—0.35	+1.8	4	2	101	5.22622	Bab. P.	44	—0.23	+0.1	4	4
65	35488	Lis.	28	—0.22	+1.2	2	4	102	24545	Bab. D.	44	—0.31	—0.2	4	4
66	35553	Plk. S.	ph.	—0.38	+0.3	4	4	103	31536	Leid.	45	—0.42	+3.4	2	1
67	36315	»	ph.	—0.35	+0.2	4	4	104	48363	»	45	+0.04	+1.6	1	2
68	53171	Sant.	28	—0.85	+0.7	1/2	4	105	52774	Sant.	45	—0.39	+1.4	2	4
69	53171	»	29	—0.65	—1.2	1	4	106	52774	»	46	—0.23	+1.2	4	4
70	3.23389	Alg. L.	ph.	—0.25	+0.5	4	4	107	6.13567	Kas. Db.	47	—0.08	+1.6	1/2	4
71	23473	Brg. K.	30	—0.20	+1.1	2	4	108	20962	Tshk. Sb.	ph.	—0.09	+7.6	2	1/2
72	27544	Cop. V. H.	31	—0.22	+0.5	2	4	109	23161	»	ph.	—0.11	+6.8	2	1/2
73	28476	Cop. M.	31	—0.14	+0.8	1	4	110	24354	Heid.	47	—0.38	+1.3	2	4
74	31383	Gr. M.	ph.	—0.25	+1.3	4	4	111	26466	Mil.	47	—0.26	+1.6	4	4
75	35228	Alg. L.	ph.	—0.25	—0.4	4	4	112	26799	Cop. V. H.	48	—0.14	+0.2	2	4
76	43268	Gr. C.	ph.	—0.02	—0.1	1	4	113	27860	Cop. M.	48	—0.11	—0.2	2	4
77	51229	La Pl.	ph.	—0.30	+0.7	4	4	114	28464	Plk. S.	ph.	—0.09	+0.1	2	4
78	52581	Wash.	32	—0.18	—0.5	2	4	115	29442	Leid.	47	—0.64	+2.0	1/2	2
79	54057	»	33	[+3.99]	[-4′1″0]	0	0	116	36159	Fr.	47	—0.23	+0.8	4	4
80	63493	M. H. T.	Mer.	—0.33	—0.3	4	4	117	39802	Par.	47	—0.20	+1.4	4	4
81	66490	M. H. J.	31	—0.23	+4.4	2	1/2	118	44076	V. S.	47	—0.66	—0.5	1/2	2
82	81860	M. H. J.	34	—0.37	+3.1	4	1	119	51840	Sant.	47	—0.25	+0.7	4	4
83	4.16913	Tshk. Sb.	ph.	—0.29	0.0	4	4	120	51840	»	49	—0.40	+5.1	2	1
84	2226	Kas. Dk.	35	—0.01	+1.4	1	4	121	51840	»	53	—0.11	—0.9	2	2
85	22950	Kas. Db.	39	—0.40	+4.6	2	1	122	7.16691	Tshk. Sb.	ph.	—0.25	+0.2	4	4
86	24242	Plk. S.	ph.	—0.23	—3.3	4	1	123	17750	»	ph.	—0.20	+0.1	4	4
87	24692	Bab. D.	36	—0.24	—0.7	4	4	124	23414	Heid.	50	—0.43	—0.4	1	4
88	24912	Cop. V. H.	39	—0.44	+2.0	2	2	125	24362	Leid.	50	—0.45	+0.5	1	4
89	25667	Bab. P.	36	—0.24	—0.5	4	4	126	25117	Par.	55	—0.37	—0.4	2	4
90	25919	Nice	40	—0.24	—1.8	4	2	127	25400	MSC.	ph.	—0.30	+2.1	4	2
91	26117	Cop. M.	39	—0.23	+1.8	4	2	128	26801	Plk. S.	ph.	—0.40	+4.5	2	1
92	26804	Plk. S.	ph.	—0.24	—1.6	4	2	129	26941	Cop. V. H.	50	—0.59	+0.9	1/2	4
93	28770	Brg. K.	40	—0.28	—0.8	4	4	130	27321	Plk. S.	ph.	—0.37	+4.1	2	1
94	36503	Lis.	37	—0.42	0.0	2	4	131	28014	»	ph.	—0.39	+4.5	2	1
95	38022	Stockh.	43 ph.	—0.15	—1.0	2	4	132	28059	Leid.	54	—	+3.0	—	2
								133	28454	Cop. B.	50	—0.46	+3.1	1	1
96	38250	Lis.	37	—0.38	+0.1	4	4	134	29275	Leid.	54	—0.29	—	4	—

(Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
№	Ср. время Гринвич Greenwich Mean T.	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δα	δδ	Bec Weight	Bec Weight	№	Ср. время Гринвич Greenwich Mean T.	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δα	δδ	Bec Weight	Bec Weight
135	7.29475	Fr.	50	—0ˢ.40	+1″.0	2	4	173	11.15495	Tshk. Sb.	ph.	—0ˢ.34	+0″.8	2	4
136	37498	Lis.	50	—0.36	—8.0	2	1/2	174	24723	Brg. K.	65	—0.22	+0.6	4	4
137	38458	»	51	—0.21	—0.4	4	4	175	26226	»	64	—0.26	+1.9	4	4
138	39861	»	54	—0.14	+0.7	2	4	176	37328	Lis.	65	—0.07	—0.5	2	4
139	41438	Fr.	54	—0.17	+2.4	4	2	177	55843	Sant.	66	—0.51	+0.5	1	4
140	44239	V. B.	54	[+4.28]	—6.2	0	1/2	178	63842	M. H. T.	Mer.	—0.19	+0 4	4	
141	51554	La Pl.	ph.	—0.28	—0.1	4	4	179	12.23238	Mil.	67	—0.20	+1.9	4	4
142	51830	Sant.	51	—0.18	—1.4	4	1	180	26062	Nice.	67	—0.18	+1.6	4	4
143	51830	»	54	—0.20	0.0	4	4	181	30678	V. S.	67	—0.10	+0.1	4	4
144	57472	Wash.	52	—0.21	—0.2	4	4	182	36439	Lis.	67	—0.12	+0.9	4	4
145	8.16681	Tshk. Sb.	ph.	—0.23	—0.1	4	4	183	37619	Brg. K.	67	—0.20	+0.7	4	4
146	18112	»	ph.	—0.28	—0.3	4	4	184	38616	Lis.	67	—0.08	+1.2	2	4
147	22476	Par.	56	—0.08	—0.1	2	4	185	39034	Brg. K.	69	—0.35	+1.3	2	4
148	23862	Heid.	56	—0.06	+0.1	1	4	186	53623	Wash.	67	—0.10	+1.0	4	4
149	24876	Mil.	56	—0.11	0.0	2	4	187	60649	Sant.	69	—0.29	+1.6	2	4
150	25184	Brg. K.	56	—0.11	—0.6	2	4	188	60649	»	70	—0.34	+0.3	2	4
151	26905	Plk. S.	ph.	—0.26	+1.5	4	4	189	69095	M. H. J.	69	—0.47	+3.3	1	2
152	27459	»	ph.	—0.27	+1.8	4	4	190	13.24032	Fr.	72	—0.15	+4.0	4	1
153	28451	Fr.	56	—0.13	+1.3	2	4	191	28128	Brg. K.	68	—0.36	+0.4	1	4
154	30777	Nice.	56	+0.02	—0.9	1	2	192	29122	Bab. D.	71	—0.02	+2.4	2	4
155	9.14644	Tshk. Sb.	ph.	—0.18	+0.4	4	4	193	29926	Brg. K.	72	0.00	+2.2	2	4
156	16376	»	ph.	—0.20	+0.7	4	4	194	30899	Bab. P.	71	0.00	+2.1	2	4
157	23100	Fr.	57	+0.02	+1.7	1	2	195	3282	Kas. Dk.	72	+0.06	+3.8	1	2
158	23984	Brg. K.	57	—0.30	—0.6	4	4	196	34148	Heid.	72	+0.05	+1.4	1	4
159	24072	Heid.	57	—0.08	—1.7	1	1	197	3428	Kas. Dk.	72	—0.06	+2.6	2	2
160	26019	Leid.	62	—0.40	+0.5	2	4	198	3586	»	73	—0.19	—2.6	4	1
161	28332	Bab. S.	58	—0.37	—1.3	2	2	199	36488	Lis.	72	—0.06	+1.8	4	4
162	30112	Bab. D.	58	—0.38	—1.1	2	2	200	3782	Kas. Dr.	72	—0.13	[+10.1]	4	0
163	10.23486	Heid.	60	—0.46	+1.9	1	4	201	3894	»	73	—0.25	—5.5	2	1/2
164	28219	Gr. C.	ph.	—0.83	—2.7	1/2	1	202	40253	Lis.	73	—0.22	+0.7	4	4
165	28284	Brg. K.	59	—0.20	+1.4	4	4	203	40403	Fr.	72	—0.04	+3.7	2	1
166	31637	Bab. P.	61	—0.19	+0.9	4	4	204	42980	V. S.	74	—0.31	—1.1	1	1
167	33228	Bab. D.	61	—0.26	+1.0	4	4	205	52752	Sant.	73	—0.15	+0.4	4	4
168	40947	Lis.	61	—0.36	+2.8	2	2	206	14.23192	Heid.	75	—0.21	+2.5	4	4
169	44390	Leid.	59	0.00	+2.0	1	4	207	23510	Mil.	75	—0.23	[—9.8]	2	0
170	52361	La Pl.	ph.	—0.20	—0.4	4	4	208	24148	Brg. K.	75	—0.18	+0.6	4	4
171	79426	M. H. J.	63	—0.31	+3 6	4	1	209	24608	V. B.	75	—0.17	+5.0	4	1
172	11.13909	Tshk. Sb.	ph.	+0.24	+1.0	1/2	4	210	24987	Fr.	75	—0.31	+4.2	1	1

(Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
№	Ср. время Гринвич Greenwich Mean T.	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δα	δδ	Вес Weight	Вес Weight	№	Ср. время Гринвич Greenwich Mean T.	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δα	δδ	Вес Weight	Вес Weight
211	14.25753	Brg. K.	78	—0ˢ.23	—1″.2	2	2	249	17.27150	Gr. C.	ph.	+0ˢ.09	0″.0	2	4
212	25851	Sonn.	75	—0.01	+2.8	2	2	250	27628	Fr.	85	—0.12	+2.6	2	2
213	26032	V. S.	75	+0.31	+2.1	1/2	4	251	29602	Leid.	85	+0.10	+1.9	2	4
214	29394	Mun.	75	—0.09	—	4	—	252	35061	Bab. D.	85	+0.06	+.9	2	4
215	31126	»	75	+0.10	+0.7	1	4	253	35097	Lis.	85	+0.2	+2.6	1	2
216	32466	Sonn.	75	+0.18	+1.3	1	4	254	36373	Bab. P.	85	—0.15	—0.3	2	4
217	34804	Alg. F.	ph.	—0.14	+0.4	4	4	255	36433	Lis.	87	—0.10	+2.7	4	2
218	35249	»	ph.	—0.13	+0.6	4	4	256	50489	Wash.	87	—0.13	+1.9	4	4
219	36350	Lis.	75	—0.12	+1.1	4	4	257	51866	»	88	—0.11	+0.6	4	4
220	39537	»	77	—0.18	—0.2	4	4	258	52594	Sant.	85	+0.16	+6.5	1	1/2
221	41682	Fr.	75	—0.30	+2.4	4	4	259	63974	M. H. T.	Mer	+0.09	+1.1	2	4
222	44510	Leid.	75	—0.10	+1.1	4	4	260	18.20806	Tshk. Sb.	ph.	+0.04	—1.0	4	4
223	51593	Wash.	75	—0.08	+1.3	4	4	261	21875	»	ph.	+0.18	—3.5	1	1
224	15.22232	V. S.	80	[+2.74]	[+38.8]	0	0	262	27186	Bes.	86	—0.17	—0.4	2	4
225	25005	Heid.	76	+0.45	+6.2	1/2	1/2	263	37965	Lis.	86	—0.28	—1.1	1	2
226	25330	Sonn.	82	—0.02	+1.6	4	4	264	40515	»	89	—0.22	—0.9	1	4
227	25675	Brg. K.	78	—0.22	—0.9	2	2	265	50816	Wash.	90	—0.11	+1.2	4	4
228	28707	V. B.	81	[+1.92]	[+21.6]	0	0	266	52456	»	91	—0.07	—0.7	4	4
229	31495	Alg. F.	ph.	—0.22	+0.3	2	4	267	53494	Sant.	86	—0.27	+1.9	1	2
230	31912	»	ph.	—0.14	+0.2	4	4	268	63928	Will. B.	93	—0.12	—0.7	2	4
231	36316	Mun.	82	+0.04	+1.9	2	4	269	19.19278	Tshk. Sb.	ph.	+0.02	—0.2	4	4
232	36423	V. S.	82	0.00	+1.8	2	4	270	20938	Mil.	95	—0.03	—0.8	4	4
233	38300	Leid.	82	—0.06	+4.5	4	1	271	20996	Tshk. Sb.	ph.	+0.10	—0.4	2	4
234	39998	Lis.	79	—0.03	—1.9	4	1	272	22454	V. S.	95	—0.07	—0.7	4	4
235	56245	Sant.	82	—0.06	+2.5	4	4	273	23888	Bord.	95	+0.11	+0.5	2	4
236	16.23854	Mil.	84	+0.02	+1.7	4	4	274	2404	Kas. Dr.	95	+0.15	+1.2	2	2
237	26823	Par.	84	—0.25	+2.5	1	4	275	25627	Nice	95	+0.14	+0.4	2	4
238	35291	Brg. K.	83	—0.22	+1.0	2	4	276	26773	Tshk. Sb.	ph.	+0.05	—1.7	4	4
239	38328	Lis.	83	—0.07	+0.3	4	4	277	27258	Trieste	95	[-0.68]	+3.8	0	1
240	51028	La Pl.	ph.	—0.13	+1.5	4	4	278	27301	Cop. V. H.	95	—0.03	—0.7	4	4
241	17.23061	Sonn.	87	—0.10	+1.8	4	4	279	28674	Cop. B.	95	—0.03	[-11.9]	4	0
242	23991	Bord.	87	—0.15	+3.1	2	2	280	30218	Barc.	95	+0.35	—0.1	1/2	4
243	24549	Heid.	85	+0.11	+2.6	2	2	281	34012	Lis.	95	+0.04	—0.7	4	4
244	24961	Sonn.	85	+0.33	+1.4	1/2	4	282	50528	Wash.	94	+0.09	+0.4	2	4
245	25168	Bes.	87	—0.12	+3.2	4	2	283	51873	»	95	+0.03	—0.7	4	4
246	25453	Par.	87	—0.18	+1.9	2	4	284	53359	Sant.	95	+0.02	—0.2	4	4
247	25670	Trieste	87	[+2.37]	+7.8	0	1/2	285	53544	»	92	—0.15	+3.1	2	1
248	26852	Gr. C.	ph.	+0.08	—1.3	2	2	286	20.2144	Kas. Dk.	97	+0.32	—0.7	1	4

(Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8
№	Ср. время Гринвич Greenwich Mean T.	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δα	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δδ	Вес Weight	Вес Weight
287	20.2268	Kas. Dk.	98	+0ᵐ.11	—1.4	2	4
288	25782	Nice	99	+0.04	—1.8	4	4
289	30204	Mil.	98	+0.03	—0.9	4	4
290	30204	»	100	—0.21	—3.7	2	1
291	30310	Stockh.	96 ph.	—0.19	—2.4	1	2
292	33047	Trieste	99	—0.15	—2.3	1	2
293	36579	Lis.	98	+0.22	—0.1	1	4
294	37605	»	99	+0.09	—1.0	4	4
295	38735	»	100	—0.19	—3.2	1	2
296	49414	Will. B.	98	+0.09	—1.4	4	4
297	62931	M. H. J.	98	+0.06	+0.9	4	2
298	21.11133	Tshk. Sb.	ph.	+0.02	—0.9	4	4
299	25260	Bes.	106	+0.06	+0.4	4	2
300	26347	Tshk. Sb.	ph.	—0.02	—0.5	4	4
301	27355	Bord.	101	—0.03	—1.9	4	4
302	29458	»	101	—0.05	—1.8	4	4
303	32226	Trieste	102	+0.66	—1.8	1/2	4
304	37751	Nice.	102	+0.09	—0.4	4	4
305	52300	Sant.	103	+0.06	—1.3	4	4
306	52300	»	104	+0.08	—1.6	4	4
307	52303	»	105	+0.08	—1.7	4	4
308	22.23209	Bes.	107	+0.18	—2.2	2	4
309	23662	Tshk. Sb.	ph.	+0.03	—0.7	4	4
310	25854	Nice	107	+0.19	0.0	2	4
311	29348	Barc.	107	+0.13	—0.5	4	4
312	31913	Mil.	107	—0.01	—1.2	4	4
313	32297	Trieste	107	+0.50	—2.5	1/2	2
314	36266	Lis.	107	+0.06	—0.5	4	4
315	52778	Sant.	107	+0.09	—2.1	4	4
316	52779	»	108	+0.11	—3.1	4	2
317	23.23968	Tshk. Sb.	ph.	+0.09	—1.2	4	4
318	51833	La Pl.	ph.	+0.03	—1.4	4	4
319	24.21989	Brg. K.	109	+0.01	—1.2	4	4
320	22094	Fr.	112	—0.15	—2.1	1	2
321	24459	Brg. K.	112	+0.08	—1.2	4	4
322	24909	Sonn.	109	+0.29	—1.0	1	4
323	25723	Düss.	114	—0.15	+1.9	1	1
324	24.26323	Bab. D.	110	+0ᵐ.18	—1.6	4	4
325	26755	Plk. K.	ph.	+0.08	+0.3	4	4
326	27120	Plk. O.	112	+0.09	—2.0	4	4
327	27622	Bab. S.	110	+0.18	—0.7	4	4
328	27832	Trieste	112	[—9.70]	[-2′35″3]	0	0
329	29814	Sonn.	112	+0.17	—1.4	4	4
330	34016	Bab. D.	112	+0.06	—1.3	4	4
331	35623	Mun.	112	—	—1.3	—	4
332	35808	Bab. S.	112	+0.03	—1.3	4	4
333	36326	Mun.	112	+0.11	—	4	—
334	49830	Wash.	111	+0.02	—1.6	2	4
335	50891	»	112	+0.13	—1.3	4	4
336	25.1196	Kas. Dr.	113	+0.08	—2.5	4	2
337	15385	Kas. Db.	116	+0.12	[-15.0]	4	0
338	1552	Kas. Dr.	113	+0.14	—1.7	4	4
339	1552	»	116	+0.28	+0.3	2	4
340	1864	»	113	+0.33	—2.7	1	2
341	1864	»	115	+0.21	+0.1	4	4
342	26367	Heid.	116	+0.20	—0.4	4	4
343	26554	Bes.	113	+0.01	—1.4	2	4
344	29971	Fr.	116	[-20.40]	—1.0	0	4
345	31253	Mil.	115	+0.25	—1.7	2	4
346	31253	»	116	+0.26	—1.3	2	4
347	35603	Heid.	116	+0.20	—0.8	4	4
348	35817	Alg. F.	ph.	+0.12	—1.0	4	4
349	36181	»	ph.	+0.08	—1.2	4	4
350	36838	Leid.	116	+0.12	—1.0	4	4
351	50183	Wash.	115	+0.13	—0.9	4	4
352	51438	»	116	+0.09	—1.0	4	4
353	53838	Sant.	116	+0.02	+2.6	2	1
354	53838	»	115	+0.13	+2.0	4	1
355	53838	»	117	+0.10	—	4	—
356	54839	»	117	—	—0.4	—	4
357	26.23432	Sonn.	118	+0.22	—1.4	4	4
358	23484	Bord.	118	+0.19	—1.1	4	4
359	23484	»	119	+0.30	+1.6	2	2
360	23774	Brg. K.	119	+0.27	—0.1	4	4
361	25258	Heid.	118	+0.25	—1.5	4	4

(*Продолжение*)

1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
№	Ср. время Гринвич Greenwich Mean T.	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem.		Вес Weight	Вес Weight	№	Ср. время Гринвич Greenwich Mean T.	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem.		Вес Weight	Вес Weight
				δα	δδ							δα	δδ		
362	26.25380	Sonn.	119	+0ˢ.32	0.0	2	4	383	28.63166	Denv.	123	+0ˢ.30	—0.5	4	4
363	25382	Berg. K.	118	+0.10	—1.5	2	4	384	64177	»	128	+0.43	—0.2	2	4
364	25926	Bes.	118	+0.31	—0.8	2	4	385	29.14517	Tshk. Sb.	ph.	+0.23	—1.3	4	4
365	30928	Fr.	118	—0.13	—0.2	1	4	386	2064	Kas. Dk.	127	+0.39	—1.7	2	4
366	50134	Wash.	119	+0.28	—0.2	2	4	387	22574	Heid.	128	—0.08	+0.9	1/2	2
367	50982	»	120	+0.22	—1.7	4	4	388	2300	Kas. Dk.	128	+0.60	+0.3	1	4
368	53083	Sant.	119	+0.24	+1.5	4	2	389	23324	Sonn.	128	+0.40	—0.7	2	4
369	53736	»	120	+0.22	—0.8	4	4	390	2475	Kas. Dk.	127	+0.40	—1.0	2	4
370	27.25955	Leid.	122	+0.22	—	4	—	391	25389	Sonn.	128	+0.37	—0.2	4	4
371	26580	»	122	—	—0.2	—	4	392	25987	Bes.	124	+0.32	—1.6	4	4
372	27407	Gr. M.	ph.	+0.18	—1.4	4	4	393	27178	Fr.	127	+0.21	—1.7	4	4
373	28097	Leid.	122	+0.23	—0.6	4	4	394	35086	Lis.	128	+0.38	—0.8	2	4
374	35382	Lis.	122	+0.33	+0.3	2	4	395	36738	»	127	+0.39	—0.9	2	4
375	37299	»	121	+0.13	0.0	2	4	396	53344	Sant.	124	+0.14	—2.3	2	2
376	62277	Will. B.	122	+0.25	—0.7	4	4	397	62374	Denv.	130	+0.62	—1.3	1	4
377	28.26911	Par.	123	+0.79	—1.7	1/2	4	398	64178	»	124	+0.15	—1.1	2	4
378	30788	Barc.	123	+0.19	—1.1	4	4	399	30.20888	Tshk. Sb.	ph.	+0.36	—0.9	4	4
379	51015	Wash.	125	+0.24	[+2′34″0]	4	0	400	24083	»	ph.	+0.33	—1.2	4	4
380	51843	La Pl.	ph.	+0.17	—2.5	2	2	401	29611	Leid.	129	+0.21	—	2	—
381	52315	Wash.	126	+0.32	—1.1	2	4	402	30207	»	129	—	—0.5	—	4
382	53249	Sant.	123	+0.29	+0.3	4	4	403	36760	Lis.	129	+0.06	—0.2	1	4

Декабрь
December

404	1.49828	Wash.	133	+0ˢ.19	—1.8	2	4	416	2.56423	Denv.	134	+0ˢ.47	—1.7	2	4
405	55078	Sant.	131	+0.36	+0.7	4	2	417	62917	M. H. J.	135	+0.35	—0.4	4	4
406	55078	»	132	+0.31	+2.4	4	1	418	64595	»	136	+0.40	+2.2	4	1
407	60188	Denv.	131	+0.40	—1.0	4	4	419	3.23037	Bord.	137	+0.36	—1.4	4	4
408	61168	»	132	+0.36	+1.0	4	2	420	23039	Heid.	137	+0.41	—0.9	4	4
409	2.39153	Par.	135	+0.42	—2.4	4	2	421	30507	Barc.	137	+0.32	—2.6	2	2
410	50206	Wash.	135	+0.35	—2.6	4	2	422	4.63235	Denv.	138	+0.54	+0.4	4	2
411	51943	»	136	+0.42	+0.7	4	2	423	64718	»	139	+0.35	—1.0	2	4
412	52650	Sant.	135	+0.44	—1.7	4	4	424	5.26984	Par.	138	+0.49	—1.7	4	4
413	52694	»	134	+0.23	—0.3	2	4	425	28027	Nice	138	+0.60	—0.7	4	4
414	54993	Will. B.	135	+0.33	—2.5	4	2	426	29534	Leid.	138	+0.46	—0.9	4	4
415	55128	Denv.	135	+0.43	—3.0	4	2	427	30656	Barc.	138	+0.86	—2.6	1/2	4

(Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
№	Ср. время Гринвич Greenwich Mean T.	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δα	δδ	Bec Weight	Bec Weight	№	Ср. время Гринвич Greenwich Mean T.	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δα	δδ	Bec Weight	Bec Weight
428	5.36628	Lis.	138	+0ˢ.49	—0″.2	4	4	466	11.26192	Heid.	153	+0ˢ.74	—1″.2	4	4
429	53091	Sant.	138	+0.32	—0.7	1	4	467	28542	Fr.	153	+0.40	+2.4	1	1
430	54292	»	140	+0.41	—1.5	2	4	468	35836	»	154	[-0.41]	+1.0	0	1
431	6.1508	Kas. Dk.	140	+0.56	—2.2	4	4	469	36223	Lis.	153	+0.69	—1.2	4	4
432	1745	»	138	+0.50	—0.9	4	4	470	37187	»	154	+0.76	—2.3	4	4
433	20500	Mil.	140	+0.63	—3.4	2	2	471	38798	V. S.	154	+1.07	—2.8	1/2	2
434	2058	Kas. Dk.	140	+0.61	—1.8	4	4	472	57325	Sant.	153	+0.65	+1.4	4	1
435	22275	Par.	140	+0.67	—2.4	2	4	473	57325	»	154	+0.61	+0.3	4	2
436	2261	Kas. Dk.	141	+0.40	—5.0	2	1	474	65969	Denv.	153	+0.67	—0.6	4	4
437	2581	»	142	+0.44	—1.5	4	4	475	66589	»	156	+0.86	—2.1	2	4
438	31821	Leid.	140	+0.57	—2.3	4	4	476	12.35025	Lis.	157	+0.75	—2.9	4	2
439	40104	Nice	140	+0.85	—2.2	1	4	477	39245	V. S.	157	+0.76	—3.8	4	2
440	7.23007	Fr.	144	[-0.11]	—4.8	0	1	478	58762	Sant.	155	+0.85	—2.0	2	4
441	24412	Alg. F.	ph.	+0.49	—2.3	4	4	479	58860	»	157	+0.84	—1.0	2	4
442	24725	»	ph.	+0.49	—1.9	4	4	480	65228	Denv.	157	+0.78	—1.1	4	4
443	25921	Mil.	143	+0.59	—2.2	4	4	481	66369	»	155	+0.92	+1.0	2	2
444	30087	Heid.	143	+0.51	—1.1	4	4	482	13.21947	Bab. D.	158	+0.66	—2.8	2	2
445	35782	Lis.	143	+0.62	—2.2	4	4	483	23461	Bab. S.	158	+0.68	—2.5	2	2
446	8.24387	Sonn.	145	+0.59	—1.4	4	4	484	23914	Sonn.	157	+0.99	—2.4	2	4
447	32806	V. S.	145	+0.25	—1.2	1	4	485	26362	Cop. V. H.	157	+0.82	—1.0	4	4
448	9.28030	Heid.	146	+0.69	—4.1	2	2	486	26730	Bes.	159	+0.75	—1.4	4	4
449	30845	Mil.	146	+0.68	—3.9	2	2	487	28503	Cop. B.	157	+0.75	—2 2	4	4
450	49834	Wash.	147	+0.66	—2.1	4	4	488	28819	V. S.	160	+0.17	—2.2	1/2	4
451	50002	Will. B.	148	+0.52	—2.2	4	4	489	30546	Brg. K.	157	+0.81	—2.5	4	2
452	50799	Wash.	148	+0.54	—3.4	4	2	490	61779	Denv.	160	+0.73	—2.6	4	2
453	56870	Denv.	146	+0.53	—3.2	4	2	491	62583	»	161	+0.78	—2.2	4	4
454	58098	»	150	+0.82	—2.8	1	4	492	14.21059	MSC.	ph.	+0.87	—0.8	4	4
455	76204	M. H. J.	149	+0.55	—1.1	4	4	493	21228	Plk. O.	163	+0.82	—2.3	4	4
456	10.24914	Sonn.	150	+0.72	—1.6	2	4	494	21596	Plk. K.	ph.	+0.80	—2.0	4	4
457	24914	»	151	+0.65	—3.0	4	2	495	26367	Gr. M.	ph.	+0.95	—2.2	2	4
458	31863	Lis.	150	+0.65	—2.2	4	4	496	27726	Bab. D.	160	+0.69	—2.5	2	4
459	36256	»	151	+0.60	—3.5	4	2	497	29269	Leid.	164	+0.89	—2.2	4	4
460	50011	Wash.	151	+0.61	—2.8	4	4	498	35377	Lis.	160	+0.65	—2.2	2	4
461	50978	»	152	+0.57	—2.3	4	4	499	36439	»	162	+0.77	+0.4	4	2
462	55166	Sant.	150	+0.49	—2.0	2	4	500	15.57297	Sant.	163	+0.76	—2.0	4	4
463	55166	»	151	+0.42	—2.9	1	2	501	57297	»	166	+0.79	—4.3	4	1
464	59914	Denv.	151	+0.56	—3.2	4	2	502	57297	»	165	+0.74	—	4	—
465	60665	»	154	+0.75	—1.6	4	4	503	57297	»	167	+0.82	—	4	—

(Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
№	Ср. время Гринвич Greenwich Mean T.	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δα	δδ	Вес Weight	Вес Weight	№	Ср. время Гринвич Greenwich Mean T.	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δα	δδ	Вес Weight	Вес Weight
504	15.57297	Sant.	168	+0.78	—2.0	4	4	542	21.23997	Plk. O.	180	+1.11	+0.8	2	2
505	64552	Denv.	162	+0.78	0.0	4	2	543	22.23169	Bord.	182	+1.16	—1.8	2	4
506	67138	»	163	+0.77	—0.4	4	2	544	23837	Par.	182	+1.06	—1.2	4	4
507	16.20664	Bab. P.	168	+0.77	—1.6	4	4	545	25273	Heid.	182	+1.08	—1.1	4	4
508	22051	Bab. D.	168	+0.81	—2.1	4	4	546	36008	Brg. K.	182	+1.07	—0.8	4	4
509	35104	Lis.	168	+0.80	—2.1	4	4	547	37808	»	187	+1.03	—3.3	4	2
510	57197	Sant.	170	+0.83	—1.8	4	4	548	51010	Wash.	185	+0.82	—2.7	2	2
511	57197	»	172	+0.84	—2.9	4	4	549	57955	Sant.	182	+0.93	—1.9	4	4
512	17.23947	Mil.	170	+0.94	+0.1	4	2	550	57955	»	186	+0.92	—3.2	4	2
513	24632	Bes.	170	+0.93	—1.5	4	4	551	58089	»	185	+0.87	—4.4	2	1
514	35199	Leid.	172	+0.95	—2.6	4	4	552	23.1429	Kas. Dk.	182	+1.11	—1.7	4	4
515	35314	Lis.	170	+0.94	—1.4	4	4	553	1594	»	183	+0.99	—0.1	4	4
516	36404	»	172	+0.93	—2.3	4	4	554	1742	»	184	+1.18	—1.2	2	4
517	36485	Nice	172	+1.13	—2.6	1	4	555	1945	»	190	+1.09	—1.7	4	4
518	42056	Par.	170	+1.12	—0.8	1	2	556	23113	Brg. K.	187	+1.00	—3.4	4	2
519	57646	Sant.	170	+0.82	—2.6	4	4	557	23432	Bab. S.	189	+1.04	—1.6	4	4
520	57646	»	172	+0.83	—3.0	4	4	558	23924	Par.	191	+0.87	—1.9	1	4
521	57679	»	169	+0.90	—4.9	4	1	559	25040	Brg. K.	191	+0.94	—1.7	2	4
522	57679	»	171	+0.82	—1.2	4	4	560	26170	Bes.	191	+1.11	—0.4	4	4
523	18.26216	Bes.	172	+1.04	—1.6	2	4	561	3069	Kas. Dr.	182	+1.19	+0.5	1	2
524	35182	Lis.	173	+0.76	—3.2	2	4	562	3069	»	191	+0.90	—1.2	2	4
525	37192	Nice	174	+0.85	—1.4	4	4	563	57507	Sant.	186	+0.99	—2.4	4	4
526	19.23316	Mil.	174	+0.69	—3.2	1	4	564	57507	»	189	+1.13	—1.4	2	4
527	24792	Nice	174	+1.00	—2.7	4	4	565	57507	»	190	+0.95	—1.6	4	4
528	35682	Lis.	174	+0.77	—2.7	2	4	566	24.0958	Kas. Dr.	191	+1.31	—2.4	2	2
529	59736	Sant.	174	+0.82	—1.7	4	4	567	1189	»	192	+1.02	0.0	4	4
530	59736	»	175	+0.98	—1.2	4	4	568	1623	»	194	+1.51	—2.8	1/2	2
531	62855	Denv.	174	+0.81	—1.2	2	4	569	1942	»	191	+1.27	+1.3	2	2
532	64791	»	172	+1.02	—4.0	2	2	570	23839	Bord.	191	+1.06	+0.6	4	2
533	20.25022	Nice	174	+0.83	—3.8	2	2	571	24402	Nice	191	+1.22	—1.1	2	4
534	35576	Lis.	174	+0.89	—3.1	4	4	572	25626	Alg. F.	ph.	+0.98	—1.9	4	4
535	53764	La Pl.	ph.	+0.99	—2.8	4	4	573	26042	»	ph.	+1.08	—3.0	4	2
536	58774	Sant.	176	+0.79	—2.8	2	4	574	32024	Mil.	191	+1.01	—1.9	4	4
537	58774	»	177	+0.77	—3.5	1	2	575	60644	Denv.	191	+0.99	—2.7	4	2
538	58774	»	178	+0.80	—3.6	2	2	576	62062	»	187	+0.98	—3.0	4	2
539	61117	Denv.	179	+1.08	—2.1	1	4	577	25.53755	Will. B.	191	+1.14	+2.2	4	1
540	62696	»	181	+1.07	+1.4	2	1	578	58105	Denv.	195	+1.09	+0.2	4	4
541	21.23138	Mil.	180	+0.88	+1.1	4	1	579	59177	»	193	+1.13	+1.5	4	2

(Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
№	Ср. время Гринвич Greenwich Mean T.	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δα	δδ	Вес Weight	Bec Weight	№	Ср. время Гринвич Greenwich Mean T.	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δα	δδ	Вес Weight	Bec Weight
580	26.0918	Kas. Dk.	196	+0ˢ.95	—0″.4	2	4	607	28.28500	Par.	206	+1ˢ.15	—1″.5	4	4
581	1097	»	199	+1.04	—0.4	4	4	608	36127	Lis.	206	+1.06	—1.0	4	4
582	1257	»	197	+1.16	—1.6	4	4	609	29.1052	Kas. Dk.	208	+1.31	—5.9	2	1
583	1484	»	200	+1.14	—1.4	4	4	610	1144	»	210	+0.85	+0.4	1	2
584	1724	»	198	+1.28	—3.3	2	1	611	1270	»	209	+1.10	—5.6	2	1
585	17258	MSC.	ph.	+1.11	—0.8	4	4	612	1450	»	212	+1.37	—2.0	1	4
586	23192	Mil.	200	+0.98	—3.6	4	1	613	1606	»	211	+1.08	—9.9	2	1/2
587	26941	Bes.	200	+1.11	—	4	—	614	1606	»	212	+1.22	—2.3	4	4
588	28546	Brg. K.	197	+1.15	—0.1	4	4	615	22020	MSC.	ph.	+1.22	—2.5	4	4
589	30002	»	202	+1.05	—2.0	4	4	616	24227	Bord.	212	+1.18	—1.0	4	4
590	34676	Lis.	198	+0.97	—2.2	2	2	617	25134	Par.	212	+0.94	—2.2	1	4
591	35865	Heid.	197	+1.50	—	1/2	-	618	26803	Bes.	212	+1.14	—2.2	4	4
592	35865	»	200	—	—4.0	—	1	619	34722	Lis.	212	+1.25	—2.5	4	4
593	36238	Lis.	197	+1.19	0.0	2	4	620	58253	Denv.	207	+1.32	—4.6	2	1
594	36830	Gr. M.	ph.	+1.08	—3.0	4	2	621	58272	Sant.	211	+1.03	—3.2	2	2
595	50342	Wash.	200	+1.10	—3.5	4	1	622	58272	»	212	+1.07	—3.1	2	2
596	51729	»	199	+1.17	—1.5	4	4	623	59727	Denv.	206	+1.01	—0.2	2	4
597	59397	Sant.	198	+0.92	—0.6	1	4	624	30.1015	Kas. Dk.	211	+1.32	—3.5	4	2
598	59397	»	199	+1.18	—2.1	4	2	625	1101	»	212	+1.13	—4.0	2	1
599	59397	»	201	+0.98	—3.6	2	1	626	25362	Nice	212	+1.35	—1.5	2	4
600	60228	»	196	+1.03	—3.4	4	1	627	57925	Sant.	211	+1.24	—2.1	4	4
601	60228	»	200	+1.03	—3.9	4	1	628	57925	»	212	+1.22	—1.1	4	4
602	27.1069	Kas. Dr.	204	+1.49	+4.4	1	1/2	629	31.27993	Nice	215	+1.28	—1.8	4	4
603	1209	»	205	+0.97	—3.6	2	2	630	55345	Sant.	213	+1.07	+0.2	1	2
604	1431	»	201	+0.92	—2.1	1	4	631	64228	Denv.	214	+1.36	—1.7	4	4
605	1431	»	206	+1.22	+1.3	2	2	632	66670	»	212	+1.34	—1.6	4	4
606	1644	»	203	+1.04	—4.3	4	1								

1925
Январь
January

	Мировое время Univ. Time								Мировое время Univ. Time						
633	2.09648	Denv.	216	+1ˢ.44	—0″.5	4	4	637	4.08460	Denv.	220	+1ˢ.39	—0″.4	4	4
634	11009	»	217	+1.32	—0.2	4	4	638	09197	»	221	+1.43	0.0	4	4
635	3.08506	»	218	+1.28	—2.7	2	2	639	5.13050	M. H. J.	222	+1.39	—1.0	4	4
636	09653	»	219	+1.37	—1.2	4	4	640	13889	»	222	+1.41	—1.0	4	4

(Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
№	Мировое время Univ. Time	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δα	δδ	Вес Weight	Вес Weight	№	Мировое время Univ. Time	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δα	δδ	Вес Weight	Вес Weight
641	6.00076	Wash.	224	+1.45	—3.2	4	2	679	14.00343	Wash.	247	+1.50	—2.6	2	2
642	01459	»	225	+1.37	—1.7	4	4	680	01961	»	249	+1.41	—1.8	1	4
643	13448	Denv.	223	+1.60	+1.4	2	1	681	06347	Sant.	246	+1.47	—3.1	2	2
644	14187	»	228	+1.38	—1.1	4	4	682	06347	»	250	+1.55	—1.2	4	4
645	99509	Wash.	227	+1.40	—1.6	4	4	683	06981	Denv.	238	+1.59	—0.2	4	4
646	7.00595	»	226	+1.31	—2.2	2	4	684	08052	»	240	+1.67	—1.7	4	4
647	01023	Will. P.	224	+1.53	—0.2	4	4	685	70931	Bab. S.	251	+1.60	+0.7	4	2
648	8.06077	Denv.	229	+1.42	—1.5	4	4	686	74226	»	251	+1.65	+1.2	4	1
649	07895	»	224	+1.33	—2.2	2	4	687	76229	Heid.	251	+1.65	+0.8	4	2
650	74955	Bord.	232	+1.53	—1.1	4	4	688	76971	Nice	251	+1.78	+1.5	2	1
651	9.6501	Kas. Dr.	231	+1.26	—1.8	1	4	689	84329	Lis.	251	+1.52	—0.6	2	4
652	77061	Bord.	234	+1.55	—1.7	4	4	690	15.06675	Denv.	251	+1.56	+2.2	4	1
653	10.07454	Denv.	232	+1.41	—1.8	4	4	691	07220	Sant.	247	+1.44	—5.8	1	1
654	08677	»	230	+1.40	—2.3	4	4	692	07220	»	250	+1.46	—3.4	1	2
655	73862	Bab. D.	233	+1.43	—1.2	4	4	693	07220	»	251	+1.58	—1.8	4	4
656	83409	Lis.	237	+1.48	0.0	4	4	694	09030	Denv.	248	+1.69	—1.9	4	4
657	11.08519	Denv.	237	+1.58	—0.8	4	4	695	84730	Lis.	252	+1.63	—1.9	4	4
658	09307	»	239	+1.41	—0.8	2	4	696	16.06620	Denv.	253	+1.79	—1.3	2	4
659	75469	Heid.	235	+1.65	—0.3	2	4	697	07078	Sant.	254	+1.71	—3.4	4	2
660	83634	Lis.	235	+1.60	—2.1	4	4	698	07192	»	252	+1.67	—0.4	4	4
661	85929	»	238	+1.51	—1.1	4	4	699	09681	Denv.	252	+1.52	—0.1	2	2
662	12.6480	Kas. Dr.	242	+1.51	—5.1	4	1	700	84552	Lis.	255	+1.73	—0.8	4	4
663	7014	»	242	+1.22	—3.2	1	2	701	87013	»	255	+1.73	—1.6	4	4
664	7110	»	241	+1.75	—7.0	2	1/2	702	17.07175	Denv.	256	+1.92	—2.7	1	4
665	76293	Heid.	240	+1.75	—0.9	2	4	703	08125	»	257	+1.67	[+11.9]	4	0
666	13.07562	Sant.	243	+1.04	+0.3	1/2	2	704	84105	Lis.	256	+1.72	—3.9	4	2
667	07562	»	245	+1.07	—2.7	1/2	2	705	87461	Nice	256	+1.92	—1.8	1	4
668	08358	Denv.	235	+1.47	—2.8	2	2	706	18.08709	Denv.	259	+1.63	+0.1	4	2
669	09363	»	236	+1.42	—1.7	1	4	707	09945	»	260	+1.58	—3.2	2	4
670	6180	Kas. Dr.	244	[-0.31]	+0.7	0	2	708	77655	Johann.	ph.	+1.73	—1.6	4	4
671	6310	»	246	+1.63	—2.7	4	2	709	80009	»	ph.	+1.66	—4.5	4	1
672	6451	»	245	+1.21	—2.2	1	4	710	81412	MSC.	ph.	+1.60	—3.2	4	4
673	73396	Bab. D.	246	+1.51	—3.2	4	2	711	19.75538	Bes.	258	+1.70	—3.1	4	4
674	74490	Bes.	251	+1.67	+0.3	4	2	712	84308	Lis.	258	+1.63	—1.3	4	4
675	78734	Nice	251	+1.85	—2.0	1	4	713	87213	Nice	258	+1.93	—2.3	1	4
676	83999	Lis.	251	+1.60	—0.2	4	4	714	20.10721	Sant.	258	+1.12	+0.4	1/2	2
677	85532	»	251	+1.64	—1.7	4	4	715	76480	Alg.	ph.	+1.70	—1.2	4	4
678	99984	Will. B.	246	+1.54	—2.8	4	2	716	76759	Bes.	264	+1.79	—1.5	2	4

(Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
№	Мировое время Univ. Time	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem.		Bec Weight	Bec Weight	№	Мировое время Univ. Time	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem.		Bec Weight	Bec Weight
				δα	δδ							δα	δδ		
717	20.77035	Alg.	ph.	+1ˢ.68	—1″.3	4	4	743	24.15372	Denv.	271	+1ˢ.70	—0″.5	4	4
718	86955	Nice	263	+1.80	—0.5	2	4	744	25.13789	»	269	+1.40	+0.8	1	4
719	21.00155	Wash.	262	+1.72	—1.5	4	4	745	15023	»	272	+1.84	+1.8	2	4
720	01695	»	263	+1.74	—1.0	4	4	746	76020	Johann.	ph.	+1.76	—3.8	4	1
721	07025	Sant.	262	+1.69	—0.5	4	4	747	27.06486	Sant.	274	+1.75	—0.3	4	4
722	07322	»	263	+1.74	—4.7	4	1	748	07128	»	273	+1.68	—1.0	4	4
723	72885	Bab. S.	264	+1.69	—1.2	4	4	749	07128	»	277	+1.51	+2.0	2	2
724	74897	Bab. D.	264	+1.66	—0.4	4	4	750	10889	Denv.	276	+1.65	+1.2	2	4
725	76170	Bord.	264	+1.81	+1.0	2	4	751	12074	»	283	+1.78	+1.2	4	4
726	78359	Bab. S.	264	+1.65	—1.3	4	4	752	80697	Bab. D.	280	+1.83	+2.7	2	1
727	88178	Nice	264	+1.88	—1.3	2	4	753	28.07653	Sant.	280	+1.91	+1.2	1	4
728	22.09355	Sant.	264	+1.80	—0.7	2	4	754	07653	»	282	+1.81	—3.3	4	1
729	09497	»	265	+1.69	—1.5	4	4	755	07657	»	278	+1.84	—0.8	2	4
730	11614	Denv.	261	+1.70	—1.5	4	4	756	07658	»	274	+1.90	—1.6	1	2
731	13161	»	263	+1.68	+0.3	4	2	757	07658	»	277	+1.81	—0.7	4	4
732	74024	Bab. D.	266	+1.61	—1.5	4	4	758	08352	Denv.	277	+1.87	+0.3	2	4
733	74308	Heid.	268	+1.92	—1.5	1	4	759	10031	»	279	+1.58	+3.7	1	1
734	75562	Bab. P.	266	+1.67	—2.3	4	4	760	29.05700	Sant.	284	+1.86	—2.7	2	1
735	75823	Nice	268	+1.83	—2.1	2	4	761	05700	»	287	+1.78	—0.7	4	4
736	75830	Bes.	268	+1.69	—2.7	4	2	762	07761	Denv.	281	+1.90	+0.7	2	4
737	23.06886	Denv.	264	+1.61	+0.1	2	4	763	09104	»	275	+1.61	+1.7	1	2
738	07021	Sant.	266	+1.79	—2.7	4	2	764	30.02538	Will. B.	285	+1.95	0.0	1	4
739	07021	»	267	+1.50	+1.5	1	1	765	13608	Denv.	285	+1.75	—1.8	4	4
740	07021	»	268	+1.64	+1.7	4	1	766	15557	»	286	+1.84	+1.2	4	2
741	07820	Denv.	268	+1.86	—0.6	2	4	767	31.00750	Wash.	288	+1.76	—1.6	4	2
742	24.14093	»	270	+1.93	+0.1	1	4	768	81713	Lis.	289	+1.72	+0.5	4	4

Февраль
February

769	2.81622	Lis.	290	+1ˢ.84	+0″.4	4	4	777	6.11721	Denv.	297	+2ˢ.13	—0″.7	2	4
770	3.81480	»	292	+2.13	+0.2	4	4	778	7.74512	Bab. P.	299	+1.80	—2.2	2	4
771	4.00425	Wash.	293	+2.15	+1.9	4	4	779	77139	»	299	+1.79	—0.7	2	4
772	03453	»	294	+1.96	—0.2	1	4	780	83056	Lis.	298	+1.77	—1.1	2	4
773	07730	Denv.	291	+2.14	+2.9	4	4	781	9.77719	Alg.	ph.	+2.05	—0.9	4	4
774	5.10290	»	296	+2.38	+1.7	1	4	782	78480	»	ph.	+2.04	+1.4	4	4
775	12108	»	290	+2.05	+1.6	4	4	783	11.09038	Denv.	301	+2.39	+3.6	1/2	1
776	6.10495	»	295	+1.89	+0.5	2	4	784	10578	»	300	+1.85	+5.4	2	1

(Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
№	Мировое время Univ. Time	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem.		Вес Weight	Вес Weight	№	Мировое время Univ. Time	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem.		Вес Weight	Вес Weight
				δα	δδ							δα	δδ		
785	11.73391	Bab. S.	302	+2ˢ.05	—1″.1	4	4	812	19.00103	Wash.	318	+2ˢ.10	+0.4	4	4
786	75009	Bab. D.	302	+2.08	—0.4	4	4	813	01955	»	319	+2.14	+0.3	4	4
787	13.04117	Sant.	308	+2.00	—1.1	4	2	814	08641	Denv.	319	+2.21	−2.2	4	1
788	04128	»	306	+2.09	+3.2	4	2	815	11200	»	321	+2.21	—0.6	4	2
789	04128	»	307	+2.13	—	4	—	816	20.07569	»	322	+2.22	+1.0	4	4
790	04968	»	307	—	+0.8	—	4	817	08806	»	323	+1.97	+4.6	1	1
791	09506	Denv.	306	+1.91	+3.1	4	2	818	21.11560	»	326	+2.16	+1.1	4	4
792	10511	»	305	+1.92	+3.5	4	2	819	13241	»	325	+2.37	—1.7	2	2
793	14.05891	Sant.	305	+2.02	+1.4	4	4	820	74705	Johann.	ph.	+2.18	—1.4	4	2
794	05891	»	306	+2.01	—0.6	4	2	821	22.08325	Denv.	324	+2.01	—1.3	1	2
795	05891	»	310	+2.09	—	4	—	822	09553	»	326	+2.40	+2.1	2	2
796	06310	»	307	+1.94	+1.5	2	4	823	74432	Johann.	ph.	+2.27	—3.2	4	1
797	07010	»	310	—	—1.8	—	1	824	23.75128	»	ph.	+2.34	—1.0	4	4
798	10547	Denv.	307	[+2.70]	+7.8	0	1/2	825	24.74232	»	ph.	+2.28	+0.6	4	4
799	12554	»	309	+1.94	+3.3	2	2	826	76848	Bab. S.	328	+2.43	—0.9	2	2
800	75682	Johann.	ph.	+2.24	—1.6	1	1	827	25.00464	Wash.	331	+2.21	+1.6	4	4
801	15.15561	Denv.	311	+1.71	—1.5	1	1	828	02142	»	330	+2.22	+1.1	4	4
802	17083	»	313	+1.83	+2.3	1	4	829	07937	Denv.	327	+2.09	+4.2	1	1
803	74355	Bab. D.	312	+2.13	+1 3	4	4	830	08920	»	332	+2.36	+1.9	2	4
804	16.82855	Lis.	316	+2.23	+1.8	2	4	831	13818	M. H. J.	331	+2.32	+1.8	4	4
805	17.08830	Denv.	315	+2.03	+0.9	2	4	832	16076	»	331	+2.30	+2.1	4	4
806	10372	»	317	+2.34	+1.9	2	4	833	75963	Bab. P.	333	+2.23	+3.3	4	2
807	18.03820	Will. B.	320	+2.25	+1.0	4	4	834	77146	Bab. D.	333	+2.27	+2.2	4	4
808	12576	Denv.	320	+2.23	+1.0	4	4	835	27.05333	Will. B.	334	+2.10	+1.8	2	4
809	75732	Johann.	ph.	+2.21	+0.6	4	4	836	28.14850	Denv.	335	+2.45	−2.8	4	1
810	76885	Heid.	319	+2.16	+1.8	4	4	837	77620	Bab. S.	337	+2.17	+2.6	2	4
811	82066	Lis.	320	+2.27	+1.5	2	4	838	78211	Heid.	336	+2.73	+4.3	1	2

Март
March

839	3.01249	Wash.	339	+2ˢ.32	+1″.6	1	2	846	7.01285	Wash.	345	+2ˢ.53	+ 3.6	2	4
840	02856	»	340	+2.38	+2.9	4	4	847	11220	Denv.	346	+2.96	+ 8.1	2	1
841	10584	Denv.	338	+2.00	+3.4	1/2	4	848	11.07350	Will. B.	349	+2.84	+ 6.6	2	4
842	11988	»	341	+2.25	+0.3	4	1	849	12.04991	»	350	+2.72	+ 2.7	2	1
843	76954	Bab. S.	342	+2.31	—1.3	4	1	850	10579	Denv.	349	+2.56	+10.1	4	1
844	4.76314	Bab. P.	344	+2.26	+2.5	4	4	851	12013	»	348	+2.53	+ 2.9	4	1
845	77584	Bab. D.	344	+2.30	+0.6	4	2	852	15.11084	»	351	+2.29	+ 7.5	2	1

(Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
№	Мировое время Univ. Time	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem.		Вес Weight	Вес Weight	№	Мировое время Univ. Time	Наблюдатель Observer	*	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem.		Вес Weight	Вес Weight
				δα	δδ							δα	δδ		
853	15.12484	Denv.	352	+2ˢ.13	+2″.4	1	4	862	24.04128	Wash.	359	+2ˢ.80	+3″.4	2	2
854	16.73441	Johann.	ph.	+2.60	+1.8	2	2	863	25.05623	Will. B.	360	+2.78	+2.3	2	2
855	74653	»	ph.	+2.63	+0.4	2	2	864	10231	Denv.	360	+2.60	+4.7	4	4
856	17.73514	»	ph.	+2.37	—0.8	4	1	865	11822	»	357	+2 51	+8.8	2	2
857	21.11148	Denv.	354	+2.36	+3.9	2	4	866	26.11146	»	361	+2.56	+7.1	2	2
858	12529	»	353	+ 2.67	+8.0	2	1	867	12752	»	358	+2.64	+6.8	4	2
859	22.11007	»	355	+2.34	+ 6.2	2	4	868	29.11756	»	362	+2.62	+4.1	4	4
860	12166	»	356	+2.54	+6.1	4	4	869	12544	»	363	+2.98	+2.3	2	2
861	81088	Brg. B.	ph.	+2.76	+5.8	1	4								

Апрель
April

870	5.07940	Will. B.	364	+2ˢ.92	+3″.5	4	4

Примечания:

Набл. 46. Момент наблюдения исправлен на -12^h.

» 59. Δα исправлено на -4^s.

» 153. Момент наблюдения исправлен на -3^h.

» 195. Δα исправлено -1^s.

» 201. Δδ, данное наблюдателем, должно быть не —8′23″.7, а +8′23″.7.

» 277. Δδ, данное наблюдателем, должно быть не +0′49″.0, а —0′49″.0.

» 292. Δδ, данное наблюдателем, должно быть не —0′12″.8, а +0′12″.8.

» 381. Δα исправлено на -4^s.

» 486. Наблюденное положение промежуточной звезды сравнения (*159) исправлено на +2′ по склонению (письмо Шофарде).

Набл. 681. Звезда сравнения отожествлена неверно. Должно быть: SF. ph. —5°0140.103.

» 750. Δα, данная наблюдателем, должна быть не $+4^s.36$, а $-4^s.36$.

» 767. Δα, данная наблюдателем должна быть не $+16^s.52$, а $-16^s.52$.

Два наблюдения Ван Бисбрёка от 14 апр. 1924 г., как стоящие изолированно, не были использованы в работе.

Эфемерида была вычислена для всего периода наблюдений, т. е. от 20 октября 1924 г. по 5 апреля 1925 г., причем непосредственно вычисление производилось через каждые 4 дня, за исключением периода времени от 20 октября по 13 ноября, когда вследствие больших разностей вычисление было произведено через каждые 2 дня. После этого интерполированием были получены истинные положения планеты для каждой Гринвичской полуночи.

Результаты сравнения наблюдений с эфемеридой даны в таблице III. Моменты наблюдений приведены в таблице без исправления за аберрацию.

Полученные таким образом разности наблюдений с эфемеридой были сведены в 4 пары нормальных поправок, из которых были затем получены 4 нормальных места.

Для определения весов наблюдений был применен метод, который мы назовем методом индивидуальных весов. Этот метод позволяет усчитать влияние не только систематических, но и случайных ошибок для каждого наблюдения. В этом его преимущество перед теми методами, в которых вес определяется для целого ряда наблюдений обычно одного наблюдателя или обсерватории, или определяется в зависимости от внешних условий наблюдений — числа наведений и т. д.

Для определения веса были предварительно построены «интерполяционные кривые разностей», для чего прежде всего были получены «средние суточные разности» для каждого дня, как среднее арифметическое всех разностей, **набл. — эфем.** за этот день — выброшены были только заведомо ошибочные наблюдения. Полученные средние суточные разности были подвергнуты численному выравниванию. Выравненные величины были приняты за ординаты некоторой кривой, абсциссами которых служило время. Проведя через вершины ординат плавную кривую, мы и получили интерполяционную кривую по данной координате (α или δ). Эту кривую, при большом числе наблюдений разных наблюдателей, полученных разными методами — фотографическим и визуальным, — привязанных к большему числу звезд, взятых из различных каталогов, можно считать достаточно свободной от влияния как случайных, так и систематических ошибок наблюдателя, а также и ошибок звездных каталогов.

Вес какого-либо наблюдения определяется таким образом: пусть разность **набл. — эфем.** по какой-либо координате будет равна:

$$\text{набл.} - \text{эфем.} = \Delta k, \qquad k = \alpha \text{ или } \delta$$

а соответствующее значение интерполяционной кривой — $\Delta' k$.

Возьмем разность

$$\Delta k - \Delta' k,$$

представляющую отклонение действительной разности **набл. — эфем.** от соответствующего значения ординаты интерполяционной кривой. Это отклонение, как мы можем считать, равняется сумме всех неучтенных ошибок наблюдения, как систематических, так и случайных. Величина этого отклонения характеризует качество данного наблюдения. Вес определялся в зависимости от абсолютной величины этого отклонения, как указано в табл. IV.

ТАБЛИЦА IV
(Table IV)

Вес Weight	Отклонения Differences
4	От 0ˢ.00 до 0ˢ.08 или от 0″.0 до 1″.2
2	» 0.09 » 0.16 » » 1.3 » 2.4
1	» 0.17 » 0.32 » » 2.5 » 4.8
1/2	» 0.33 » 0.64 » » 4.9 » 9.6
0	Более 0.64 » более 9.6

При этом величина Δk исправлялась за систематическую поправку наблюдателя (см. ниже).

Наблюдения комбинировались в нормальные места таким образом, чтобы соответствующая интерполяционная кривая имела в данном месте по возможности прямолинейный ход, и в качестве нормальной поправки принималось взвешенное среднее всех поправок. Однако, для первого нормального места, где обе интерполяционные кривые имели заметную кривизну, был применен метод Чебышова.[2] Нормальные места для следующих оппозиций вычислялись по мере вычисления возмущений, как результат сравнения наблюдения с возмущенными эфемеридами. Сравнение наблюдений этих оппозиций с соответствующими эфемеридами дало следующие разности наблюдение — вычисление (табл. V).

ТАБЛИЦА V
(Table V)

№	Миров. время Univ. Time	Наблюдатель Observer	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δα	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δδ	Примеч. Notes	Сравнение неисправл. набл. Uncorrected Observations. Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δα	Сравнение неисправл. набл. Uncorrected Observations. Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δδ	Примеч. Notes
			Оппозиция 1926 г.					
874	Febr. 11.23843	W.B.V.B.	—2ˢ.23	+10″.9		»	»	
875	16.20577	» »	—2.02	+ 8.6		»	»	
876	March 10.14560	» S.	—1.95	+ 2.9		—1ˢ.90	+19.8	
877	10.15984	» »	—2.10	+ 5.5		—	—	
878	14.13299	» V.B.	—1.78	+ 8.6		-3ᵐ56ˢ.71	+ 8.4	

[2] Mém. de l'Acad. imp. des Sciences de St.-Pétersbourg, Sér. VII, T. I, 1859, № 5, p. 1—81.

(Продолжение)

№	Миров. время Univ. Time	Наблюдатель Observer	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δα	Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δδ	Примеч. Notes	Сравнение неисправл. набл. Uncorrected Observations: Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δα	Сравнение неисправл. набл. Uncorrected Observations: Набл.-Эфем. Obs.-Ephem. δδ	Примеч. Notes
			Оппозиция 1927 г.					
879	Febr. 27.33698	W.B.V.B.	—2ˢ.70	—2″.4		»	»	
880	March 4.24919	» »	—2.50	+2.3		—	—	
881	4.26314	» »	—2.49	+2.3		—2.48	—30.0	
882	9.27546	» »	[+1.22]	+0.2		»	»	
883	9.29740	» »	[+1.28]	—3.6		—	—	
884	28.20715	» »	—2.55	+0.5		»	»	
885	Apr. 6.18483	» »	—2.40	+1.2		»	»	
			Оппозиция 1928 г.					
886	Apr. 20.26370	W.B.V.B.	—11.07	—12″.9	1	—	—	
887	24.99605	Mil.	—11.66	—21.6		»	»	
888	May 22.16539	W. B. Ch.	—10.94	—29.7		—	—	
889	22.18333	» »	—10.81	—41.5		—10.78	+41.8	2
890	23.15409	» »	—11.00	—37.3		—	—	
891	23.17569	» »	—10.88	—42.6		—10.19	—2′15″.5	2
892	June 9.88884	Alg. F.	—11.50	—36.5		—	—	

Примечания:

1. Момент наблюдения исправлен на -2^h. 2. При первом вычислении нормальных мест было сделано предположение, что эти наблюдения содержат ошибку в целое число минут по склонению, и им была придана поправка $-1'$ и $+2'$. Это предположение оказалось не совсем точным. 3. Наблюдению придан вес $= 1/2$ в виду изолированного положения этого наблюдения.

Таблица VI (A и B; см. стр. 1265) дает нормальные места, причем в A даются нормальные места в их первоначальном виде — до получения исправленных наблюдений от Ван Бисбрёка, и в B — в их окончательном виде.

V. Исследование качества наблюдений

Для исследования качества наблюдений 1036 Ганимеда были определены систематические поправки наблюдателей и средние ошибки одного наблюдения для большинства наблюдателей. Возьмем величину

$$\Delta k - \Delta' k,$$

уже встречавшуюся выше. Эту величину мы можем предполагать равной

ТАБЛИЦА VI A
(Table VI A)

	Среднее вр. Гринвич Greenw. M. Time Мировое время Univ. Time	α 1925.0	δ 1925.0	Число наблюдений Number of observations
I	1924 Nov. 12.5	$22^h40^m28^s.424$	+ 3°24′43″.22	382, 376
II	Dec. 16.5	0 41 29.941	— 4 49 14.72	228, 225
III	1925 Jan. 18.0	2 1 19.086	— 3 45 14.28	135, 135
IV	Febr. 25.0	3 19 57.085	+ 0 15 52.73	100, 100
V	1926 Febr. 27.0	8 47 33.65	—16 29 42.0	3, 4
VI	1927 March 15.0	11 23 36.60	—20 13 35.5	5, 4
VII	1928 May 14.0	14 22 59.31	— 9 11 38.4	3, 3

ТАБЛИЦА VI B
(Table VI B)

	Среднее вр. Гринвич Greenw. M. Time Мировое время Univ. Time	α 1925.0	δ 1925.0	Число наблюдений Number of observations
I	1924 Nov. 12.5	$22^h40^m28^s.422$	+ 3°24′43″.22	389, 387
II	Dec. 16.5	0 41 29.936	— 4 49 14.86	228, 225
III	1925 Jan. 18.0	2 1 19.076	— 3 45 14.28	135, 135
IV	Febr. 25.0	3 19 57.077	+ 0 15 52.65	100, 100
V	1926 Febr. 27.0	8 47 33.70	—16 29 44.0	5, 7
VI	1927 March 15.0	11 23 36.60	—20 13 35.5	5, 7
VII	1928 May 14.0	14 22 59.13	— 9 11 50.5	7, 7

сумме: 1) систематической ошибки наблюдателя (или лица, измерявшего пластинку, в случае фотографических наблюдений) — E_k, 2) ошибки в положении звезды (или звезд) сравнения — e_k и 3) случайной ошибки наблюдения (измерения) — e'_k, т. е.

$$\Delta k - \Delta' k = E_k + e_k + e'_k \qquad k = \alpha, \delta.$$

Считая систематическую ошибку наблюдателя постоянной для некоторого периода наблюдений, мы можем допускать, что среднее арифметическое этих отклонений для данного ряда наблюдений какого-либо наблюдателя будет равно его систематической ошибке. Взяв эту ошибку со знаком —, получим его систематическую поправку. Интерполяционные кривые могут служить для этой цели только там, где они достаточно точны, т. е. построены на основании достаточного

числа наблюдений — как было принято в данном случае — не менее 4—5 наблюдений в день в среднем, при условии непрерывности наблюдений ото дня ко дню. Таким условиям кривая удовлетворяет в течение периода времени от конца октября 1924 г. по конец января 1925 г. Почти все ряды наблюдений, содержащие не менее 5 наблюдений, как микрометрические, так и фотографические, были подвергнуты исследованию. Результаты приведены в таблице VII, где Δ обозначает систематическую поправку наблюдателя, ε — ее среднюю ошибку, ε' — среднюю ошибку одного наблюдения и n — число наблюдений.

Из этой таблицы видно, что фотографические наблюдения оказываются в среднем точнее микрометрических. Что касается систематических поправок, то они в общем невелики и притом лишь незначительно превосходят их средние ошибки. Наиболее значительная систематическая поправка оказалась у Шомасса (Schaumasse), равная $\Delta\alpha = -0^s.14 \pm 0^s.02$.

Интересно произвести сравнение систематических поправок и средних ошибок одного наблюдения, полученных здесь с аналогичными величинами, получаемыми иногда при вычислениях окончательных орбит комет. Такое сравнение было произведено с наблюдениями кометы 1904 I, обработанными проф. С. Казаковым,[3] 1905 V, обработанными Zappa[4] и некоторыми другими. Сравнение показало, что эти систематические поправки в случае кометных наблюдений оказываются значительно бо́льшими, чем в случае малых планет. Так, для микрометрических наблюдений (фотографические наблюдения не рассматриваются, ибо для указанных выше комет таких наблюдений мало) средние величины абсолютных значений систематических поправок по прямому восхождению и склонению для кометы 1904 I будут $0^s.11$ и $0''.7$, в то время как для Ганимеда они оказываются соответственно равными $0^s.04$ и $0''.4$. Еще резче это заметно, если обратить внимание на величину наиболее крупных систематических поправок. Для комет эти наибольшие систематические поправки оказываются порядка $+0^s.46$ и $-2''.9$, в то время как для Ганимеда они достигают величины только $-0^s.14$ и $-1''.5$. Что касается средних ошибок одного наблюдения, то здесь почти никакой разницы не наблюдается. Так, среднее значение средних ошибок наблюдений для кометы 1904 I соответственно по прямому восхождению и склонению будут $\pm 0^s.13$ и $\pm 1''.5$, а для Ганимеда $\pm 0^s.13$ и $\pm 1''.4$. Совершенно то же самое получается и в случае кометы 1905 V и других.

Таким образом, из всего сказанного можно сделать такой вывод. При микрометрических наблюдениях неясность и размытость изображения наблюдаемого объекта сильно влияет на величину систематической ошибки наблюдателя в сторону ее увеличения и не оказывает заметного влияния на величину случайных ошибок наблюдений.

[3] Annales de l'Obs. astr. de Moscou. Ser. 2., vol. VIII, livr. 1, p. 18.
[4] Mem. Coll. Rom., vol. IV.

ТАБЛИЦА VII
(Table VII)

Наблюдатель Observations	Инструмент Instrument	Период наблюдений Period of observer.	α				δ			
			Δ	ε	ε′	n	Δ	ε	ε′	n
I. Фотографические наблюдения (Photographic observations)										
Alg. F.	34 cm		+0.05	±0.02	±0.06	10	+0.8	±0.3	±1.0	10
Alg. L.	34 »		—0.07	±0.03	±0.07	6	—0.2	±0.2	±0.6	6
La Pl.	34 »		+0.02	±0.02	±0.06	8	+0.3	±0.2	±0.6	8
MSC.	16 »		—0.02	±0.03	±0.08	6	+0.2	±0.5	±1.2	6
Plk. S.	34 »		+0.01	±0.01	±0.10	11	—0.8	±0.7	±2.5	11
Tshk. Sb.	34 »		0.00	±0.04	±0.21	25	—0.1	±0.4	±2.1	25
					±0.10				±1.2	
II. Микрометрические наблюдения (Micrometric observations)										
Bab. D.	65 cm	25 X–27 I	+0.04	±0.02	±0.09	21	+0.2	±0.9	±1.3	21
Bab. P.	65 »	27 X–22 I	—0.01	±0.03	±0.10	10	+0.1	±0.4	±1.4	10
Bab. S.	65 »	9 XI–21 I	+0.01	±0.02	±0.07	11	—0.1	±0.5	±1.1	11
Barc.	38 »	19 XI– 5 XII	—0.11	±0.10	±0.20	5	+0.4	±0.4	±1.0	5
Brg. K.	26 »	25 X–26 XII	+0.02	±0.01	±0.09	30	+0.5	±0.1	±0.9	30
Bes.	33 »	17 XI–22 I	—0.01	±0.02	±0.09	17	0.0	±0.4	±1.7	16
Bord.	38 »	17 XI–21 I	—0.02	±0.02	±0.08	13	+0.1	±0.5	±1.8	11
Denv.	51 »	28 XI–31 XII	—0.05	±0.02	±0.12	34	—0.1	±0.3	±1.9	34
»	51 »	2 I–30 I	+0.02	±0.02	±0.12	42	—0.2	±0.2	±1.5	40
Fr.	20 »	6 XI–11 XII	+0.07	±0.05	±0.18	14	—1.0	±0.4	±1.8	17
Heid.	33 »	25 X–17 XI	—0.09	±0.08	±0.24	10	—0.4	±0.6	±1.7	10
»	33 »	25 XI–22 I	—0.06	±0.04	±0.13	14	+0.1	±0.3	±1.3	14
Kas. Dr.	31 »	13 XI–13 I	—0.03	±0.04	±0.20	21	0.0	±0.4	±1.8	20
Kas. Dk.	31 »	13 XI–30 XII	—0.03	±0.02	±0.15	33	+1.0	±0.4	±2.0	33
Cop. V. H.	36 »	26 X–13 XII	+0.05	±0.06	±0.16	7	0.0	±0.3	±0.8	7
Leid.	26 »	5 XI–17 XII	—0.02	±0.03	±0.13	16	—0.8	±0.3	±1.2	17
Lis.	38 »	6 XI–26 XII	+0.02	±0.02	±0.13	62	+0.2	±0.2	±1.2	60
Mil.	49 »	6 XI–26 XII	+0.02	±0.02	±0.10	17	+0.9	±0.3	±1.3	16
M. H. J.	91 »	30 X– 5 I	+0.01	±0.04	±0.12	10	—1.5	±0.5	±1.5	10
Nice	40 »	4 XI–22 I	—0.14	±0.02	±0.12	22	+0.6	±0.3	±1.4	23
Par.	38 »	6 XI–29 XII	—0.01	±0.05	±0.20	14	0.0	±0.2	±0.9	14
Sant.	28 »	28 X–22 XI	+0.02	±0.03	±0.14	34	—0.1	±0.3	±1.6	32
»	28 »	25 XI–12 XII	+0.04	±0.02	±0.11	20	—0.4	±0.3	±1.2	12
»	28 »	15XII–31 XII	+0.06	±0.01	±0.08	32	+1.0	±0.2	±1.2	30
»	28 »	13 I–29 I	+0.05	±0.03	±0.16	26	+0.6	±0.3	±1.8	27

(Продолжение)

Наблюдатель Observer	Инструмент Instrument	Период наблюдений Period of observ.	α				δ			
			Δ	ε	ε′	n		ε	ε′	n
Sonneb.	14 cm	14 XI–13 XII	—0ˢ.11	±0ˢ.03	±0″.11	15	—0″.2	±0″.2	±0″.8	15
Wash.	66 »	29 X–31 I	+0.02	±0.01	±0.07	43	+0.6	±0.1	±0.9	42
Will. B.	102 »	27 X–30 I	—0.02	±0.02	±0.08	11	0.0	±0.3	±0.9	11
					±0.13				±1.4	

VI. Получение исходных элементов

Система исходных элементов, положенная в основу окончательного исправления, была получена следующим образом: элементы были вычислены на основании нормальных мест I, II и III обычным методом определения орбит по трем наблюдениям, но в предположении, что приближенные геоцентрические расстояния известны (из эфемериды) и с бо́льшей против обычного точностью.

Полученные элементы оказались следующими:

T. 1924 Dec. 14.0 [2424134.0]

M_0	17°20′59″.12	
ω	130 36 47.53	Эклиптика 1925.0
Ω	216 27 26.90	
i	26 8 43.98	
φ	32 36 59.70	
μ	815″.43450.	
lga	0.4257451.	

(A)

Остаточные ошибки нормальных мест, в том числе и IV, не участвовавшего в вычислениях, даны в следующей таблице VIII.

ТАБЛИЦА VIII

(Table VIII)

Норм. места	I	II	III	IV
Δ α	0ˢ.00	—0ˢ.01	+0ˢ.02	—0ˢ.12
Δ δ	—0″.1	0″.0	—0″.3	—0″.5

После вычисления возмущений до оппозиции 1926 г. и сравнения с наблюдениями этой оппозиции была введена эмпирическая поправка среднего движения

$$\Delta\mu = -0''.13000.$$

Таким образом была получена следующая система исходных элементов:

$$\begin{array}{ll} \text{T. 1924 Dec. 14.0 [2424134.0]} & \\ M_0 & 17^\circ 20' 59''.12 \\ \omega & 130\ 36\ 47.53 \\ \Omega & 216\ 27\ 26.90 \\ i & 26\ \ 8\ 43.98 \\ \varphi & 32\ 36\ 59.70 \\ \mu & 815''.30450. \\ \lg a & 0.4257913. \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \text{Эклиптика} \\ \text{1925.0} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \quad \text{(B).}$$

VII. Возмущения

Для вычисления возмущений Ганимеда от больших планет был применен классический метод изменения произвольных постоянных, причем вычисления производились по следующим формулам:

$$\sin i \frac{d\delta\Omega}{dt} = \sin u \cdot {}^{r}/_{p} \cdot W_1$$

$$\frac{d\delta i}{dt} = \sin u \cdot {}^{r}/_{p} \cdot W_1 \cdot \operatorname{ctg} u.$$

$$\frac{d\delta e}{dt} = \sin v \cdot R_1 + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin v \cdot \operatorname{ctg} v + e \cdot {}^{r}/_{p} \cdot S_1 \qquad (1)$$

$$e\frac{d\delta\bar{\omega}}{dt} = -\sin v \cdot R_1 \operatorname{ctg} v + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \cdot \sin v \cdot S_1$$

$$w\frac{d\delta\mu}{dt} = -\frac{3kw}{p\sqrt{a}} \cdot e \cdot \sin v \cdot R_1 - \frac{3kw}{p\sqrt{a}} \cdot \frac{p}{r} \cdot S_1$$

$$\frac{d\delta M_0}{dt} = -2\frac{r}{p} \cdot \cos\varphi \cdot R_1$$

При этом:

$$\delta M = \int_{t_0}^{t_1}\int w \frac{d\delta\mu}{dt}\, dt^2 - \cos\varphi\, \delta\bar{\omega} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\delta M_0}{dt}\, dt$$

$$\delta\varphi = \delta e \cos\frac{\delta\varphi}{2} \sec\left(\varphi_0 + \frac{\delta\varphi}{2}\right)$$

$$\delta\omega = \delta\bar{\omega} - \cos i\, \delta\Omega,$$

где R_1, S_1 и W_1 суть помноженные на величину $\frac{\sqrt{p}}{\mu}$ компоненты возмущающего ускорения по осям: продолженному радиусу вектору планеты, перпендикуляру к нему в плоскости оскулирующей орбиты и положительной нормали плоскости орбиты. Остальные обозначения обычны.

Как было упомянуто, во время первой оппозиции Ганимед был очень близок к Земле. Еще ближе он находился в это время к Марсу (ок. 0.16 астр. ед.). Так как благодаря этому можно было предполагать наличие в это время заметных возмущений от этих двух планет, то, кроме возмущений от Юпитера и Сатурна, были вычислены для периода сближения всех трех небесных тел, именно—для периода от 15 октября 1924 г. по 27 февраля 1925 года, возмущения также, и от Земли и Марса. Возмущения от Юпитера и Сатурна вычислялись с интервалами в 40 дней, а для Земли и Марса с интервалами в 20 дней. Величины возмущений, интерполированные для моментов нормальных мест, а также для моментов оппозиций 1930 и 1931 г., даны в табл. IX. δM — полное возмущение средней аномалии.

ТАБЛИЦА IX
(Table IX)

	δM	$\delta\omega$	$\delta\Omega$	δi	$\delta\varphi$	$\delta\mu$
1924 Nov. 12.5	+1.048	—1.292	+0.069	+0.159	—0.844	—0.01221
Dec. 16.5	—0.139	+0.204	—0.043	—0.065	+0.136	—0.00218
1925 Jan. 18.0	—2.656	+2.579	—0.856	—0.950	+1.633	—0.02125
Febr. 25.0	—8.107	+6.298	—2.436	—1.845	+4.488	—0.04428
1926 Febr. 27.0	—155.235	+82.633	—75.371	—3.318	+40.926	—0.15624
1927 March 15.0	—389.010	+230.102	—175.611	+24.325	+72.571	—0.10287
1928 May 14.0	—614.545	+358.324	—207.257	+53.725	+62.860	+0.18892
1930 Jan. 19.0	—319.387	+277.833	—244.266	+44.909	+90.296	+0.75014
1931 Febr. 21.0	+414.032	+165.241	—298.785	+52.588	+121.039	+1.18654

Положения планеты, вычисленные с элементами В и этими возмущениями дали следующее представление нормальных мест (предварительных):

ТАБЛИЦА X
(Table X)

Норм. места Normal places	I	II	III	IV	V	VI	VII
$\Delta\alpha$	—4.13	—1.32	—0.15	+0.19	—0.04	—2.55	—10.88
$\Delta\delta$	— 9.6	— 8.4	— 7.1	— 5.1	+ 0.3	+ 0.2	—18.4

VIII. Исправление элементов

Для исправления орбиты малой планеты 1036 Ганимед был применен метод вариации элементов, а именно в форме Баушингера (Bauschinger) — 1-й метод.[5] Исправление было проведено в координатных осях, отнесенных к среднему экватору 1925 г. В следующей табличке приведены оскулирующие элементы ω', Ω' и i' для эпох нормальных мест:

ТАБЛИЦА XI
(Table XI)

	I	II	III	IV	V	VI	VII
ω'	66°55′47″	66°55′48″	66°55′48″	66°55′48″	66°56′46″	67°00′26″	67° 3′59″
Ω'	276 58 56	276 58 56	276 58 59	276 59 1	276 58 12	276 55 24	276 53 24
i'	15 17 45	15 17 45	15 17 44	15 17 43	15 17 14	15 16 46	15 16 47

С этими элементами были вычислены (дважды, для контроля) коэффициенты условных уравнений, которые приведены в следующей таблице XII.

ТАБЛИЦА XII
(Table XII)

	dM_0	$d\mu$	$d\varphi$	ds	dp	dq	l	P
1	+6.8669	— 465.672	+1.0426	+1.6800	—0.1668	+0.2106	— 61.8	4
2	+4.3606	— 144.364	+2.4163	+1.3030	+0.0219	—0.0118	— 19.0	4
3	+2.7151	— 16.353	+2.3090	+1.0115	+0.1240	—0.0252	— 2.2	4
4	+1.7056	+ 46.726	+1.9888	+0.8397	+0.1749	+0.0118	+ 3.3	4
5	+0.5672	+ 222.972	+0.9934	+1.2500	+0.1132	+0.2549	— 0.6	1
6	+0.4707	+ 383.342	—0.3149	+1.2957	—0.0136	+0.0935	— 35.6	1
7	+1.1986	+1470.091	—2.5382	+1.5529	+0.1661	—0.1113	—161.1	1
8	+0.1506	— 85.222	—0.7528	—0.0678	+1.3671	—1.7261	— 9.6	4
9	—0.4532	— 74.365	—1.0984	—0.3353	+1.3177	—0.7132	— 8.5	4
10	—0.3792	— 54.655	—0.8057	—0.3023	+1.1226	—0.2286	— 7.1	4
11	—0.3042	— 35.648	—0.5528	—0.2407	+0.9385	+0.0634	— 5.1	4
12	—0.1022	— 67.689	—0.1401	—0.2955	+0.5065	+1.1412	+ 0.3	1
13	—0.0423	— 55.571	+0.2011	—0.0957	—0.1854	+1.2764	+ 0.2	1
14	—0.2231	+ 294.673	—0.3964	+0.2093	—1.2921	+0.8654	— 18.4	1/2

Как было уже упомянуто, при этом первом исправлении были использованы предварительные нормальные места.

Некоторое затруднение вызвало решение вопроса о том, какие веса придать условным уравнениям, в виду того, что нормальные места были образованы

[5] J. Bauschinger. Die Bahnbestimmung d. Himmelskörper, 2. Aufl., S. 446.

из весьма различного числа взятых для их образования наблюдений и, следовательно, имели весьма различную теоретическую точность. Придавая слишком высокий вес некоторым уравнениям, хотя бы эти уравнения и действительно имели значительно более высокую точность сравнительно с другими, мы могли бы почти совершенно исключить влияние этих последних и, быть может, не повысить, а ухудшить результат. Особенно этого следовало опасаться в случае, подобном настоящему, когда за 4 нормальными местами очень высокой точности, приходящимися на одну оппозицию, следуют три нормальных места значительно менее высокой точности, приходящиеся на 3 последующих оппозиции. Придавая слишком высокий вес (напр. пропорционально числу взятых наблюдений) сравнительно с остальными, условным уравнениям, соответствующим этим 4 нормальным местам, мы могли бы фактически свести результат к исправлению орбиты лишь по одной оппозиции. Поэтому, отступая от установившегося обычая, условным уравнениям были приданы не слишком разнящиеся между собою веса, указанные в последнем столбце (P) таблицы XII.

Решая эти уравнения по способу наименьших квадратов, мы получили следующие значения неизвестных:

$$\begin{array}{ll} d_1M_0 = -17''.493 & d_1s = +4''.819 \\ d_1\mu = -0.07038 & d_1p = -2.875 \\ d_1\varphi = +16.871 & d_1q = -2.385\,, \end{array} \qquad (2)$$

откуда были получены следующие поправки исходных элементов:

$$\begin{array}{ll} \Delta M_0 = -17''.49 & \Delta i = +3''.68 \\ \Delta\mu = -0.07038 & \Delta\omega = +6.10 \\ \Delta\varphi = +16.87 & \Delta\Omega = -1.43 \end{array} \qquad (3)$$

и, следовательно, исправленные элементы оказались:

Эпоха и оскуляция 1924 Dec. 14.0 [2424134.0]

M_0	17°20′41″.63	
ω	130 36 53.63	Эклиптика 1925.0.
Ω	216 27 25.47	
i	26 8 47.66	
φ	32 37 16.57	
μ	815″.23412.	
lga	0.4258161.	

(C)

Полученные элементы достаточно хорошо представляют положенные в их основу нормальные места, что видно из таблицы XIII A. Однако, еще лучше представляются ими полученные после этого исправления более точные нормальные места, как показано в той же таблице XIII в столбце B.

ТАБЛИЦА XIII
(Table XIII)

	A		B	
	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
I	—0.1	—0.1	—0.1	—0.1
II	+0.2	+0.6	+0.1	+0.4
III	+0.1	+0.2	—0.1	+0.2
IV	+0.2	+0.4	+0.1	+0.4
V	+3.0	+1.6	+3.8	—0.3
VI	—0.7	—1.8	—0.7	—1.8
VII	+0.4	+9.8	—2.0	—2.2
	$\Sigma pv^2 = 78.96$		$\Sigma pv^2 = 34.26$	

Для получения окончательных элементов, вполне удовлетворяющих новым исправленным нормальным местам, было произведено второе исправление тем же методом, причем были использованы те же условные уравнения, в которых вместо правых частей были взяты остаточные разности из таблицы XIII.B, конечно умножив $\Delta\alpha$ на $\cos\delta$. Кроме того, последнему уравнению, вследствие повысившейся точности, был придан вес $= 1$.

Обычное решение этих уравнений дало следующие значения неизвестных:

$$\begin{aligned} d_2M_0 &= +0''.795 & d_2s &= -2''.282 \\ d_2\mu &= +0.00342 & d_2p &= -0.202 \\ d_2\varphi &= +0.029 & d_2q &= +0.291. \end{aligned} \qquad (4)$$

Складывая эти величины с полученными ранее величинами (2), имеем:

$$\begin{aligned} \Delta M_0 &= -16''.694 \pm 0''.34 \\ \Delta\mu &= -0.06696 \pm 0.00120 \\ \Delta\varphi &= +16.900 \pm 0.24 \\ \Delta s &= +2.537 \pm 0.71 \\ \Delta p &= -3.077 \pm 0.33 \\ \Delta q &= -2.094 \pm 0.36. \end{aligned} \qquad (5)$$

Отсюда получаются следующие окончательные поправки исходных элементов:

$$\begin{aligned} \Delta M_0 &= -16''.69 \\ \Delta\mu &= -0.06696 \\ \Delta\varphi &= +16.90 \\ \Delta i &= +3.59 \\ \Delta\omega &= +4.08 \\ \Delta\Omega &= -1.82 \end{aligned} \qquad (6)$$

Следовательно, окончательные значения исправленных элементов будут:

Эпоха и оскуляция 1924 Dec. 14.0 [2424134.0]

M_0	17°20′42″.43		
ω	130 36 51.61	Эклиптика 1925.0.	(D)
Ω	216 27 25.08		
i	26 8 47.57		
φ	32 37 16.60		
μ	815.23754.		
lga	0.4258149.		

Или, отнеся оскуляцию к ближайшей оппозиции:

Эпоха и оскуляция 1935 Febr. 20.5 [2427854.0]

M_0	140°31′33″.41		
ω	130 37 5.12	Эклиптика 1925.0.	(D′)
Ω	216 21 41.16		
i	26 10 14.61		
φ	32 40 48.98		
μ	816.69017		
lga	0.4252995		

Остаточные ошибки, полученные как путем непосредственного сравнения нормальных мест с вычисленными эфемеридами, так и путем подстановки поправок в условные уравнения, приведены в таблице XIV.

ТАБЛИЦА XIV
(Table XIV)

Норм. места Norm. places	Δ α		Δ δ	
	Ephem.	Equ.	Ephem.	Equ.
I	0″.0	+0″.1	—0″.2	—0″.3
II	+0.1	+0.1	+0.2	+0.2
III	+0.1	0.0	+0.1	+0.1
IV	—0.3	—0.3	+0.3	+0.4
V	+1.3	+1.2	+0.4	+0.3
VI	—1.5	—1.3	—1.2	—1.4
VII	+0.4	+0.3	—1.2	—1.0
	$\Sigma pv^2 = 8''.48$			

Таким образом, мы видим, что полученные элементы хорошо удовлетворяют нормальным местам. Малые средние ошибки элементов также указывают на хорошее качество полученных элементов. Об этом же говорят и представления наблюдений последующих после окончания этой работы оппозиций, полученные после учета возмущений от Юпитера и Сатурна. Эти представления (в среднем) следующие:

ТАБЛИЦА XV

(Table XV)

Оппозиция Opposition	Представления Representations		Наблюдения Observations
	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	
1930	+0.06	—0.5	2 набл. Ван Бисбрёк; 3 набл. Джексон (C Jackson), Иоганнесбург
1931	+0.26	—2.5	3 набл. Ван Бисбрёк
1932	+0.45	—0.7	2 набл. Ван Бисбрёк
1933	+0.51	—2.0	2 набл. Крумпгольц (Krumpholz) Вена; 2 набл. Шорр (Schorr), Бергедорф; 1 набл. Буайе (Boyer), Алжир

IX. Яркость Ганимеда

Во время оппозиций 1928 и 1930 гг. было обращено внимание на то, что малая планета 1036 Ганимед обладает яркостью большей, чем было указано в эфемеридах. В оппозицию 1930 г. разница достигала $1^m.7$, по наблюдениям Джексона (Jackson) в Иоганнесбурге. В виду этого мною было произведено небольшое исследование этого вопроса. Мною было собрано 117 наблюдений, в число которых входило 53 фотометрических наблюдения Граффа (Graff).[6] К сожалению, большинство этих наблюдений относилось к первой оппозиции 1924 г. Что касается оппозиций 1927, 1928 и 1930 гг., то там имелось только 4 приближенных определения яркости, основанных, впрочем, повидимому, на нескольких оценках каждое. Все наблюдения яркости были сведены в 10 нормальных мест. В таблице XVI приведены эти нормальные места. Здесь m_0 есть средняя яркость в звездных величинах; φ — угол фазы; n — число использованных наблюдений, причем число фотометрических наблюдений (в скобках) и визуальных дано отдельно. P — принятый вес нормального места и R, R' — остаточные разности.

[6] Astr. Nachr., 225, 158.

ТАБЛИЦА XVI
(Table XVI)

Норм. места Norm. places	m_0	φ	P	N	R	R'
I	$14^m.07$	47°.9	1	13+[13]	$-0^m.05$	$+0^m.04$
II	14.06	46.4	1	4+[3]	+0.06	+0.13
III	13.82	45.6	1/2	9	−0.09	−0.03
IV	13.94	45.0	1	7+[6]	+0.07	+0.12
V	13.93	44.2	1	9+[26]	+0.10	+0.14
VI	13.80	43.3	1	6+[5]	+0.08	+0.11
VII	13.30	42.1	1/2	5	−0.33	−0.32
VIII	12.92	40.5	1/2	6	−0.59	−0.60
IX	12.6	14.3	1/2	2	+0.05	+0.07
X	12.7	5.2	1/2	2	+0.21	+0.37

Из рассмотрения таблицы XVI очень хорошо видна зависимость средней звездной величины (m_0) от угла фазы (φ). Этим обстоятельством и объясняется наблюдаемое расхождение между действительной и предвычисленной яркостью. В течение оппозиции 1924 г. Ганимед все время наблюдался при большой фазе, менявшейся в пределах от 48°.5 до 40°.5. Так как это обстоятельство не было принято во внимание при вычислении постоянных m_0 и g_0, которые вследствие этого были определены неверно, то и все предвычисленные яркости были ошибочны; это и вызывало расхождения.

После нескольких попыток подобрать подходящую функцию, устанавливающую связь между величинами m_0 и φ, оказалось, что, повидимому, наилучшим образом удовлетворяет нормальным местам следующая кривая, полученная способом наименьших квадратов:

$$m_0 = 12^m.48 + 0^m.000018\varphi^2 + 0^m.0000150\varphi^3, \qquad (8)$$

где φ выражен в градусах.

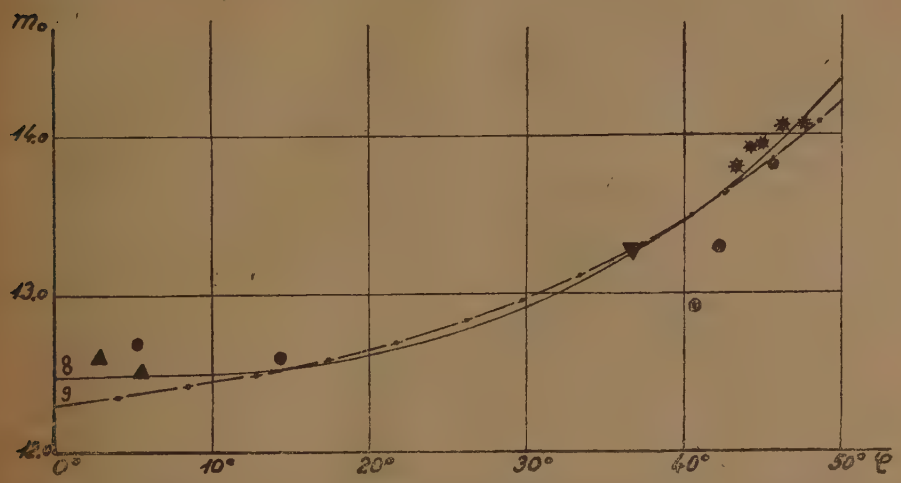
Только нормальные места VII и VIII не вполне удовлетворительно представляются этой кривой. Но эти нормальные места были образованы из небольшого числа оценок небольшой точности, а потому не могут считаться достаточно точными. Остаточные ошибки даны в таблице XVI столбец R. Величина $\Sigma pv^2 = 0^m.29$.

Другая кривая

$$m_0 = 12^m.30 + 0^m.01448\varphi - 0^m.000059\varphi^2 + 0^m.0000107\varphi^3, \qquad (9)$$

быть может, находится в лучшем согласии с прежними исследованиями, дававшими обычно (при небольших интервалах φ) зависимость такого вида: $m_0 = a + b\varphi$ (прямую линию), так как эта кривая содержит член с 1-й степенью φ, но она несколько хуже удовлетворяет нормальным местам. Остаточные разности в этом

случае представлены столбцом R' таблицы XVI. $\Sigma pv^2 = 0^m.36$. Наблюдения 1931 и 1932 гг. также удовлетворяют кривой (8) лучше, чем кривой (9). На чертеже эти наблюдения представлены знаком ▲.[7]



Фиг. 1. Кривые (8) и (9) зависимости средней звездной величины Ганимеда (m_0) от угла фазы (φ).

Взявши кривую (8) мы получаем следующее выражение, позволяющее вычислить яркость малой планеты для любого момента:

$$M = 12^m.48 + 0^m.000018\varphi^2 + 0^m.000015 0\varphi^3 - 5 \lg a(a-1) + \\ + 5 \lg r \cdot \Delta, \qquad (10)$$

где a большая полуось орбиты, r — радиус вектор, Δ — расстояние планеты от Земли. Величина

$$g_0 = 9^m.24 \qquad (11)$$

Что касается колебаний яркости самой планеты, подозревавшихся некоторыми наблюдателями, то, повидимому, их не существует, что находится в хорошем согласии с исследованиями проф. К. Граффа.[8]

К сожалению, недостаточное число наблюдений при малых и средних фазах не позволило произвести более детальных исследований.

[7] Полученные мною недавно 3 фотометрические наблюдения проф. К. Граффа, произведенные 26 — 28 сентября 1933 г., почти точно и притом одинаково удовлетворяют обоим кривым. На чертеже они обозначены значком ▼.

[8] Loc. cit.

I. PUTILIN. ORBIT OF THE ASTEROID 1036 GANYMED

ABSTRACT

In this work are given the results of the definitive orbit of the very interesting asteroid 1036 Ganymed and some complementary investigations.

In order to obtain the definitive orbit of the asteroid 1036 Ganymed I have availed myself of 892 observations. Of these 873 refer to the opposition 1924. With respect to the observations of the oppositions 1926, 1927 and 1928, embraced by this work, I had at the beginning at my disposal only 13 observations. With these observations were formed the preliminary normal places and was carried out the first improvement of the orbit. As a number of these observations, made at the Yerkes observatory, particularly the ones of the opposition 1928, were found to be erroneous, the respective plates at my request were kindly remeasured. Besides were obtained some new observations earlier unknown to me. Thus the total number of observations during these three oppositions amounted to 19 with which were formed the definitive normal places. Table I gives the entire list of the observations.

The places of comparison stars were as far as possible revised and given in table II.

The comparison of the observations of the first opposition 1924 was carried out with the ephemeris computed from the elements of G. Stracke (a).[1] The results of this comparison are given in table III. From the obtained residuals **Obs.-Ephem.** were formed the first four normal places. The observations were weighted in the following manner: two interpolation curves of residuals — for α and δ — were constructed. For this the «daily mean residuals», as the mean of all residuals **Obs.-Ephem.** in the course of that day were obtained; these mean residuals were numerically smoothed and then these values were plotted as ordinates, with the time as abscisses, two smooth curves were drawn through the points. The weight of each observation was determined in dependance on the values of the differences of the actual residual **Obs.-Ephem.** for this observation from the corresponding point of the interpolation curve. Table IV illustrates the correlation between the difference mentionned and the weight assigned in the observations.

The normal corrections were obtained as the weighted mean of corresponding residuals, excepting the first normal place, for which in view of the interpolation curves having a considerable curvature at these places, Tschebyshov's method[2] had to be applied.

The normal places for the following oppositions were obtained after the perturbations were computed, as resulting from the comparison of the observations with the disturbed ephemeris. Table V gives the residuals thus obtained.

Table VI A gives the preliminary normal places. In forming these normal places the observations 889 and 890 were supposed to be erroneous by a whole number of minutes in δ and the following corrections were inserted into the residuals: in the first $-1'$. and in the second $+2'$. This supposition appeared to be not quite true.

Table VI B gives the normal places in their definitive form.

By forming the normal places an investigation of quality of the observations of Ganymed was carried out. For this were determined the systematic corrections of the observer — Δ with their mean errors — ε and the mean errors of one observation ε' of

most observers of this asteroid. The results of this are given in table VII. By the way these results were compared with the results of the analogous investigations of observations of comets, namely of comets 1904 I[3], 1905 V[4] and others. These comparisons have shown that the systematic corrections of the observer in the case of comets are considerably larger than in the case of an asteroid, whereas the mean errors of one observation are as well as equal in both cases.

Thus we can draw the following conclusion: with micrometric observations the dimness and nebulosity of the objects' image has a great influence on the value of the systematic error of the observer increasing the same, and has no noticeable influence on the occasional errors of the observations.

The set of elements of departure for obtaining the definitive orbit was computed from the normal places I, II, III and is given in (B).

For computing the perturbations the classical method of variation of arbitrary constants was applied, using the formulae (1). The perturbations due to Jupiter and Saturn for a whole period and due to the Earth and Mars for the time of their proximity to Ganymed, i. e. for the period of the first opposition, were taken into account The values of perturbations are given in table IX.

In the computation of the improvement of the orbit of the asteroid I applied the method of variation of elements and namely in the form of Bauschinger (1st Method).[5] The coefficients of conditions are given in table XII. In the first computation the preliminary normal places were taken. The solution of these equations of condition gives the corrections to the elements of departure (3) and the improved elements (C) Table XIII gives the residuals with these elements of the preliminary (A) normal places and the definitive ones (B) as well.

The definitive improvement was carried out by the same method with the definitive normal places and the residuals from table XIII B. The definitive corrections to the elements are given in (5) and (6) and the definitive elements in (D) and (D). The residuals of the normal places are shown in table XIV and the representations of the observations for the oppositions 1930, 1931, 1932 and 1933, are given in table XV.

Chapter IX gives the results of the investigation of brightness of the asteroid. The 117 observations (most from the opposition of 1924) and among these 53 photometric observations of Prof. K. Graff were investigated. 10 normal places were formed from all observations and after that I succeded to find the dependance between the mean stellar brightness of the asteroid (m_0) from the angle of phase (φ) as is shown in table XVI. After some tests, I have found that the normal places, taking the angle of phase φ as argument, appeared to be satisfied in the best way by the curve (8) and a little worse by the curve (9). The residuals in both these cases are given in table XVI columnes R and R. Taking curve (8) the formula (10) for magnitude of the asteroid for any moment is obtained. The constant g_0 has been found to equal $9.^m24$. (Footnotes 1 to 5 see in the Russian text).

Moscow.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ВЛИЯНИЕ РАСТВОРИТЕЛЯ НА ГЕТЕРОГЕННЫЙ КАТАЛИЗ. КАТАЛИЗ ПЕРЕКИСИ ВОДОРОДА В РАЗЛИЧНЫХ РАСТВОРИТЕЛЯХ. I

Л. В. ПИСАРЖЕВСКОГО и Т. С. ГЛИКМАН

Возможность влияния растворителя на ход гетерогенного катализа является следствием из результатов исследования одного из нас над влиянием растворителя на величину свободной энергии химической реакции.[1]

Сольватация молекул, участвующих в катализируемой реакции веществ, должна так или иначе сказаться на адсорбции их катализатором и, следовательно, а скорости катализа.

Если данная реакция, начинаясь на катализаторе, идет затем в объем, — обладает цепным характером, — то сольватация несомненно должна играть здесь также определенную и значительную роль.

Если катализатором является металл, напр., платина, то на сцену выступает и взаимодействие между ионами металла и молекулами растворителя, ведущее к образованию вокруг него в растворе сольватов его ионов, так или иначе принимающих участие в катализе.

Наконец, не исключается возможность того или иного участия молекул растворителя в цепной реакции, протекающей в объеме.

Поэтому потенциал металл-раствор, дипольный момент молекул растворителя, его диэлектрическая постоянная, его внутреннее трение, диаметр его молекул, должны влиять на ход каталитического процесса.

Поставив на очередь вопрос о роли растворителя в гетерогенном катализе, один из нас остановился на перекиси водорода и органических перекисях.

Механизм катализа перекиси водорода платиной в водном растворе в общих чертах выяснен В. А. Ройгером[2] в лаборатории нашего Института.

[1] Писаржевский. Свободная энергия химической реакции и растворитель, Москва, 1912, и ряд статей в ЖРФХО за годы 1903—1910 и в Z. f. Phys. Chemie, 52 (1905), 479; 63 (1908), 257 и 467.

[2] В. А. Ройтер. О механизме катализа перекиси водорода платиной. Журн. Физ. хим., т. IV (1933), вып. 4, стр. 457.

С другой стороны, фотохимическое разложение перекиси водорода несомненно цепного характера.[1] Все это, в связи с простотой экспериментальной постановки изучения, делает каталитическое разложение H_2O_2 в различных растворителях удобным объектом для изучения перечисленных выше факторов.

Нами исследовалась реакция разложения H_2O_2 платиной в водном, эфирном и водно-эфирном растворах. Каталитическое разложение перекиси водорода в водном растворе идет мономолекулярно.[2] Кинетика же разложения H_2O_2 в эфирном растворе, как видно из нижеприведенных данных, сильно меняется в зависимости от содержания воды в эфире.

Эффект влияния примеси воды настолько резко выражен, что несмотря на незначительную растворимость воды в эфире, оказалось возможным получить кривую зависимости скорости процесса от концентрации воды.

Методика опытов. Водно-эфирный раствор H_2O_2 готовился взбалтыванием абсолютного (по Гаттерману) эфира с водным пергидролем. Содержание воды в таком эфирном растворе $= 1.2\%$.[3]

Эфирный раствор готовился из водно-эфирного раствора сушкой над хлористым кальцием или серной кислотой.

Конечно, таким методом сушки, полностью удалить всю влагу нельзя, но как показали опыты, уменьшение концентрации воды, достигаемое таким путем, достаточно для резкого понижения скорости катализа.

Катализатор — платинированная и прокаленная платиновая пластинка. Длительность опыта — 4 мин., температура опыта 0° (тающий лед). Количество разложившейся перекиси определяется оттитровыванием H_2O_2 до и после опыта перманганатом 0.1 — 0.2 N. Скорость процесса выражается в процентах разложившейся, за время опыта, перекиси (см. табл. 1).

Концентрация H_2O_2 выражена в количестве $см^3$ перманганата, идущего на титрование H_2O_2.

Как видно из таблицы, скорость процесса в водно-эфирном растворе всегда значительно больше скорости в чисто водном и эфирном растворах. Соотношение же скоростей водного и эфирного растворов зависят от степени сушки эфирного раствора, как показали ряд специальных опытов и ход кривых зависимости скорости от концентрации воды в эфире (см. ниже).

При длительной сушке скорость в эфирном растворе меньше скорости в водном. После сушки над серной кислотой скорость катализа была настолько незначительна, что возникла мысль об отравляющем действии серной кислоты. Это предположение пришлось, однако, оставить, так как прибавление воды к такому,

[1] Kornfeld. Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie, Photophysik und Photochemie, 1921, Bd. 21, S. 65.

[2] Л. Писаржевский и В. Ройтер. Наукові записки наук, досл. кат. 1926.

[3] Landolt-Börnstein. Phys. Chem. Tabellen, 1931.

сушенному над H_2SO_4 раствору, снова повышает скорость катализа. Совершенно ясно, что тут имеет место не отравление, а более интенсивное действие H_2SO_4 как осушителя по сравнению с $CaCl_2$.

Таблица 1

	Водный раствор	Водно-эфирный	Водно-эфирный сушенный над $CaCl_2$	Примечание
Концентрация H_2O_2	10.2	11.6		
Скорость	13.6%	37.5%		
Концентрация		12.5	15.9	
Скорость		42.4%	14.0%	
Концентрация	6.0	8.7		
Скорость	18.3%	47.1%		
Концентрация	6.0	4.2	1.6	
Скорость	16.6%	26.2%	18.7%	
Концентрация	8.5	6.2	7.95	
Скорость	12.9%	29.2%	16.9%	
Концентрация	12.0	12.0	12.9	
Скорость	16.8%	20.8%	8.1%	Длительн. сушка
Концентрация	24.4	26.7	27.2	
Скорость	17.6%	47.2%	20.9%	
Концентрация	24.8	27.5	32.8	
Скорость	14.1%	36.3%	10.7%	Длительн. сушка

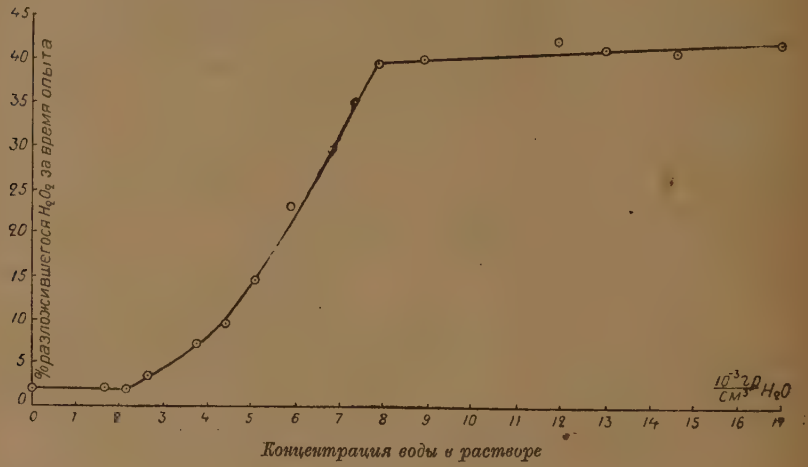
Представляло интерес исследовать количественно влияние содержания воды в эфире на скорость катализа H_2O_2. С этой целью варьировалась концентрация воды в эфирном растворе.

Исходным раствором являлся сушенный эфирный раствор, к которому при энергичном взбалтывании из микробюретки прибавлялось различное количество воды. Метод этот недостаточно точен, но эффект влияния воды настолько значителен,[1] что удалось получить, даже при этом методе, ряд характерных кривых (см. фиг. 1, 2, 3).

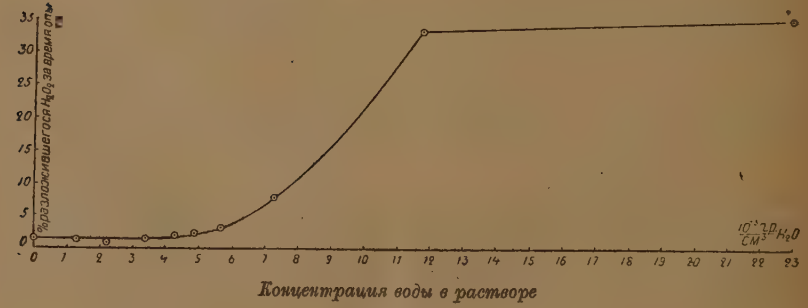
То обстоятельство, что при расчете концетраций воды, не учитывается вода, оставшаяся в эфире после сушки, не влияет на ход кривой, но лишь смещает ее относительно оси ординат.

[1] Как сильно влияет вода на увеличение скорости катализа платиной показывает следующий простой (лекционный) опыт: в пробирку с раствором перекиси в сушенном эфире опускается платиновая пластинка. Заметно очень слабое выделение пузырьков, т. е. крайне малая скорость реакции. Если затем к этому раствору прибавить каплю воды — начинается бурное выделение кислорода.

Из помещаемых здесь кривых видно, что скорость разложения H_2O_2 вначале очень мала и мало зависит от содержания воды в эфире (кривая вначале идет почти параллельно оси абсцисс). Выше некоторой определенной концентрации воды в растворе скорость заметно увеличивается (1-я точка перегиба) и растет с повышением количества прибавленной воды до некоторого предела, после кото-



Фиг. 1.

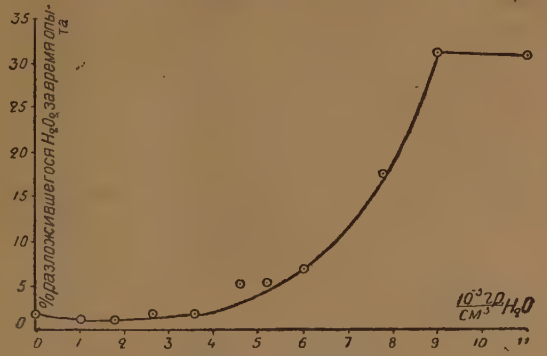


Фиг. 2.

рого (2-я точка перегиба) снова остается постоянной. Существование 2-й точки перегиба вполне объясняется существованием предела растворимости воды в эфире, равного 1.2% при комнатной температуре. По достижении этого предела — концентрация воды, а, следовательно, и скорость процесса должны оставаться постоянными. В наших кривых 2-я точка перегиба отвечает различному количеству прибавленной воды, всегда меньше, чем 1.2%. Это легко объяснить, если вспомнить, что при расчетах, условно, не принимается во внимание количество воды (разное

для различных опытов), оставшееся после сушки; таким образом вычисленное содержание воды всегда меньше истинного.

Различное положение 1-й точки перегиба может быть также объяснено различной степенью сушки, хотя не исключена возможность, что на положение 1-й точки перегиба может влиять ряд причин, стоящих в тесной связи с механизмом катализа.



Концентрация воды в растворе

Фиг. 3.

Представляло значительный интерес получить кривые зависимости скорости процесса от истинного содержания воды в эфире. С этой целью были поставлены аналогичные опыты, но в немного измененной постановке.

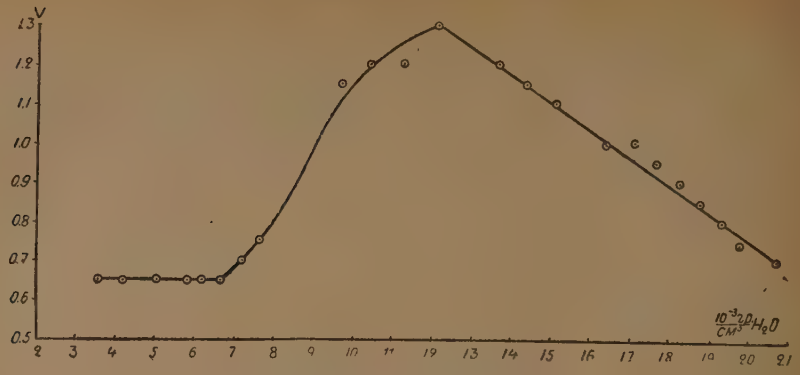
Эфирно-водный раствор готовился взбалтыванием водного раствора 50% — 65% перекиси с абсолютным эфиром. Эфирный слой, содержащий H_2O_2 и воду до насыщения отделялся в делительной воронке, и 10 см³ его разбавлялись точно измеренным количеством абсолютного эфира. Таким способом, количество воды в растворе могло быть точно вычислено и изменено по желанию.

Фиг. 4.

Прибор состоит из сосуда, соединенного с газовой бюреткой (см. фиг. 4). Катализатор впаян в колено сосуда. Скорость реакции определялась по количеству выделившегося кислорода в единицу времени. По количеству выделившегося кислорода можно было вычислить количество разложившейся, с образованием воды, перекиси, а, следовательно, и концентрацию воды в растворе в каждый данный момент.

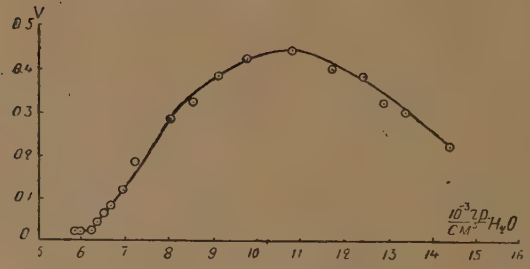
Результаты нанесены на кривые.

Как видно из кривых (5, 6, 7), полученные данные целиком совпадают с результатами прежних опытов (ср. фиг. 1, 2, 3). Разница в ходе кривых целиком зависит от измененной постановки опыта. В первых опытах (фиг. 1, 2, 3) определения производились каждый раз с новой порцией перекиси, т. е. концентрация H_2O_2 оставалась все время постоянной. В последних определениях (фиг. 5, 6, 7) мы имеем дело все время с одной порцией перекиси, концентрация которой падала по мере разложения. Таким образом, каждую кривую (5, 6, 7) можно



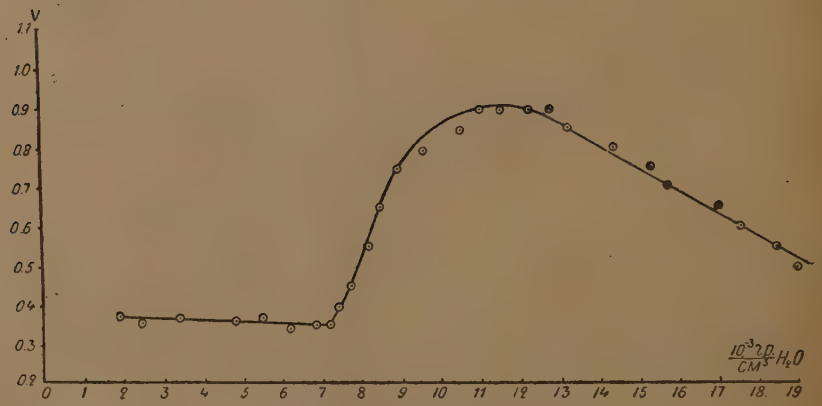
Концентрация воды в растворе

Фиг. 5.



Концентрация воды в растворе

Фиг. 6.

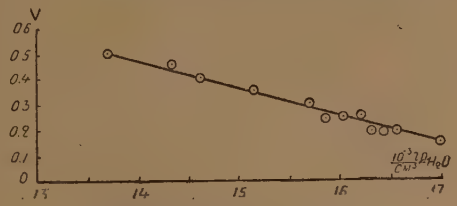


Концентрация воды в растворе

Фиг. 7.

рассматривать как состоящую из двух кривых, наложенных одна на другую: одной — обычной кривой скорости для мономолекулярных реакций, другой — кривой зависимости скорости разложения H_2O_2 от концентрации воды в растворе.

Как видно из кривых — вторая точка перегиба отвечает содержанию воды $= \sim 1.2\%$, что вполне подтверждает вышеприведенные соображения о причинах ее возникновения; 1.2% — предел растворимости воды в эфире, прибавление воды к эфиру свыше этой величины, не может увеличивать больше ее концентрации в эфире и, следовательно, оказывать влияние на ход процесса. В части, отвечающей содержанию воды большей, чем 1.2%, процесс зависит только от изменяющейся концентрации перекиси и, следовательно, кривая должна иметь вид кривой скорости для мономолекулярных реакций. Это подтверждается опытом.



Концентрация воды в растворе

Фиг. 8.

Кривая скорости, полученная для эфирного раствора, предварительно насыщенного водою, идентична с частью кривых (5, 6, 7) в области, отвечающей содержанию воды больше, чем 1.2% (фиг. 8).

Несомненно, крайне интересным является факт существования 1-й точки перегиба и причины, влияющие на ее положение. Эта точка лежит в области, отвечающей содержанию воды ~ 0.007 г воды на 1 см³ раствора. Опыты, поставленные с H_2O_2 разных концентраций, не дали изменений в положении этой точки, что как будто исключает предположение о необходимости для интенсивного разложения предварительной гидратации H_2O_2 (см. табл. 2).

Таблица 2

Концентрация H_2O_2	Начальное содержание воды в растворе	Положение 1-й точки перегиба	Положение 2-й точки перегиба
2.4 %	0.00303 г/см³	0.0076 $\frac{\text{г}H_2O}{\text{см}^3}$	0.0127 $\frac{\text{г}H_2O}{\text{см}^3}$
1.63	0.00588 г/см³	0.00716 $\frac{\text{г}H_2O}{\text{см}^3}$	0.0118 $\frac{\text{г}H_2O}{\text{см}^3}$
1.204	0.00304 г/см³	0.00796 $\frac{\text{г}H_2O}{\text{см}^3}$	0.088 $\frac{\text{г}H_2O}{\text{см}^3}$

Положения 1-й и 2-й точек перегиба выражено в соответствующих им концентрациях воды.

Для выяснения, не является ли 0.007 г воды в 1 см³ эфира, величиной, специфичной для данного катализатора, были поставлены опыты с Pt — катали-

затором разной величины и приготовления. Как показали предварительные опыты, положение 1-й точки перегиба остается постоянным. С этой же целью были поставлены опыты с катализатором MnO_2, нанесенным на угольную пластинку.

Кривой зависимости скорости от содержания воды в эфире получить не удалось, так как не удалось получить катализатор с достаточно постоянной активностью. Сравнение же скорости разложения H_2O_2 в эфирном, водном и водно-эфирном растворе, в присутствии MnO_2 — катализатора, дало те же результаты, что и опыты, проведенные с платиновым катализатором[1] (см. табл. 3).

Таблица 3

	Эфирн. раствор сушенный над H_2SO_4	Тот же сущ. эфирн. раствор, насыщ. водою	Водный раствор
Скорость реакции	2.7	4.1	
	2.6	3.9	
	9.8	19.6	
	18.2	55.7	20

Скорость реакции выражена в процентах разложившейся за время опыта перекиси. Катализатор — перекись марганца.

Повидимому, при катализе H_2O_2 главным фактором влияния растворителя является то или иное его действие в самом объеме раствора, оно покрывает влияние взаимодействия молекул растворителя с ионами металла-катализатора, ведущее к образованию вокруг него в растворе сольватов его ионов, так или иначе причимающих участие в катализе. Повидимому и сольватация молекул H_2O_2 не играет особой роли в процессе адсорбции ее катализатором.

Данные предварительных опытов одного из нас со смесями ацетон + вода (от 5% до 95% ацетона), в присутствии платинового катализатора допускают возможность предположения цепного механизма катализа, механизма, где растворитель является ингибитором. Однако вероятность полной остановки катализа платиной перекиси водорода в абсолютно сухом эфирном растворе несомненно говорит о наличии непосредственного действия растворителя на каталитическую активность катализатора. Исследование продолжается в направлении изучения действия различных растворителей, их смесей и различных катализаторов.

[1] Ориентировочные опыты с MnO_2 катализатором были проделаны еще в 1930 г. Ш. Н. Мататашвили (Тифлис) под руководством одного из нас. Опыты дали аналогичные результаты.

До накопления достаточного количества опытного материала мы воздержимся от истолкования механизма влияния растворителя на ход гетерогенного катализа перекиси водорода и механизма действия самого катализатора в различных растворителях.

Днепропетровск
Институт физической химии.
19 IV 1934.

L. W. PISSARJEWSKY und T. S. GLÜCKMANN. DER EINFLUSS DES LÖSUNGSMITTELS AUF DIE HETEROGENE KATALYSE. KATALYSE VON WASSERSTOFFSUPEROXYD IN VERSCHIEDENEN LÖSUNGSMITTELN. I

ZUSAMMNEFASSUNG

Die Möglichkeit einer Beeinflussung des Verlaufs der heterogenen Katalyse durch das Lösungsmittel folgt aus den Ergebnissen einer Arbeit, die einer von uns über den Einfluss des Lösungsmittels auf den Betrag der freien Energie einer chemischen Reaktion durchgeführt hat.[1]

Die Solvatation der Molekeln der an der zu katalysierenden Reaktion beteiligten Stoffe, muss sich auf diese oder jene Weise, in deren Adsorption durch den Katalysator, folglich also auch in der Geschwindigkeit der Katalyse auswirken.

Verläuft die betreffende Reaktion, am Katalysator beginnend, räumlich, besitzt sie also den Charakter einer Kettenreaktion, so muss die Solvatation hier zweifellos auch eine bestimmte und bedeutende Rolle spielen.

Dient ein Metall, z. B. Platin, als Katalysator, so tritt hier noch die gegenseitige Einwirkung der Metallionen und der Molekeln des Lösungsmittels in Erscheinung, die um den Katalysator in der Lösung zur Bildung von, auf diese oder jene Weise an der Reaktion beteiligten, Solvaten seiner Ionen führt.

Schliesslich ist die Möglichkeit, dass die Molekeln des Lösungsmittels irgendwie an der räumlich verlaufenden Kettenreaktion beteiligt sind, nicht ausgeschlossen.

Deshalb müssen das Potential Metall-Lösung, das Dipolmoment der Molekeln des Lösungsmittels, seine Dielektrizitätskonstante, die innere Reibung, sowie der Durchmesser seiner Molekeln den Verlauf des katalytischen Vorgangs beeinflussen.

Da nunmehr die Rolle des Lösungsmittels bei der heterogenen Katalyse aufzuklären war, wählte einer von uns dazu das Wasserstoffsuperoxyd und die organischen Peroxyde.

Wir haben die Reaktion der Zersetzung des H_2O_2 durch Platin in wässeriger, ätherischer und wässerig-ätherischer Lösung untersucht. Gemäss einer Reihe von Versuchen verläuft die katalytische Zersetzung des Wasserstoffsuperoxyds in wässeriger Lösung monomolekular. Dagegen ändert sich die Kinetik der Wasserstoffsuperoxydzersetzung in ätherischer Lösung mit dem Wassergehalt des Aethers sehr stark.

[1] L. W. Pissarjewsky. Die freie Energie einer chemischen Reaktion und das Lösungsmittel. Moskau, 1912, und eine Reihe von Berichten in der Zeitschrift der Russischen Physikalischen und Chemischen Gesellschaft in den Jahren 1903—1910 und in der Zeitschrift für Physikalische Chemie 52 (1905), 479; 3 (1908), 287 und 487.

Der Wirkungseffekt des gelösten Wassers ist so scharf ausgeprägt, dass es möglich war, ungeachtet der geringen Löslichkeit des Wassers in Aether, einige Kurve für die Abhängigkeit der Geschwindigkeit des Vorganges vom Wassergehalt aufzunehmen. Die Reaktionsgeschwindigkeit in einer wässerig-ätherischen Lösung i m m e r bedeutend grösser ist, als in einer reinen wässerigen oder ätherischen Lösung.

Wie stark das Wasser die Geschwindigkeit der Katalyse beeinflusst, zeigt folgender einfacher (Vorlesungs-) Versuch: In ein Reagenzglas mit einer Lösung von H_2O_2 in getrocknetem Aether wird eine Platinplatte eingetaucht. Man beobachtet eine nur sehr schwarche Blasenbildung, das heisst eine äusserst geringe Reaktionsgeschwindigkeit. Setzt man aber dieser Lösung einen Tropfen Wasser zu, so beginnt eine heftige Sauerstoffentwicklung.

Bei anhaltendem Trocknen ist die Geschwindigkeit in einer ätherischen Lösung geringer, als in einer wässerigen. Nach dem Trocknen über Schwefelsäure war die Geschwindigkeit der Katalyse so gering, dass der Gedanke an eine vergiftende Wirkung der Schwefelsäure auftauchte. Doch musste diese Annahme bald wieder verlassen werden, da ein Zusatz von Wasser zu einer solchen, über H_2SO_4 getrockneten Lösung, die Geschwindigkeit der Katalyse wieder steigert.

Der wichtigste Faktor für den Einfluss des Lösungsmittels auf die Katalyse des H_2O_2 ist offenbar irgendeine von ihm ausgeübte Wirkung im Raum des Lösungsmittels selbst. Sie überlagert den Einfluss der gegenseitigen Einwirkung der Molekeln des Lösungsmittels mit den Ionen des als Katalysator dienenden Metalls, was um ihn in der Lösung zur Bildung von Solvaten seiner Ionen führt, die sich auf diese oder jene Weise an der Katalyse beteiligen. Anscheinend spielt auch die Solvatation der Molekeln des H_2O_2 bei ihrer Adsorption durch den Katalysator keine besondere Rolle.

Die Ergebnisse von Vorversuchen, die einer von uns mit Mischungen von Aceton und Wasser (5—95% Aceton) in Gegenwart eines Platinkatalysators durchgeführt hat, ermöglichen die Annahme eines Kettenmechanismus der Katalyse, eines Mechanismus, bei dem das Lösungsmittel als Inhibitor dient.

Doch sagt die Wahrscheinlichkeit einer vollständigen Unterbrechung der katalytischen Wasserstoffsuperoxydzersetzung durch Platin im Falle der Lösung im absoluten Aether unbedingt dafür, dass eine unmittelbare Wirkung des Lösungsmittels auf die katalytische Aktivität des Katalysators statt findet.

Die Arbeit wird fortgesetzt und zwar soll die Wirkung verschiedener Lösungsmittel, ihrer Gemische und verschiedener Katalysatoren erforscht werden.

Solange nicht genügend Versuchsmaterial vorliegt, müssen wir uns einer Deutung des Mechanismus des Einflusses, den das Lösungsmittel auf den Verlauf der heterogenen Katalyse des Wasserstoffsuperoxyds hat und des Mechanismus der Wirkung des Katalysators selbst in verschiedenen Lösungsmitteln, enthalten.

Dnepropetrowsk
Institut d. physikal. Chemie
19 IV 1934.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ЭНЗИМАТИЧЕСКИЙ РАСПАД САХАРА ДО УГЛЕКИСЛОТЫ, СПИРТА И МОЛОЧНОЙ КИСЛОТЫ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМ ОБРАЗОВАНИЕМ ТРИОЗЫ (СООТВ. ТРИОЗО-ФОСФОРНОЙ КИСЛОТЫ)

А. Н. ЛЕБЕДЕВА

(*Представлено академиком* Н. Д. Зелинским)[1]

В 1911 г. (1) на основании того факта, что при брожении диоксиацетона образуется тот же эфир, который был выделен мною при изучении кинетики брожения гексозы еще в 1908 г. (2), мною была дана схема:

$$C_6H_{12}O_6 = 2C_3H_6O_3;\ 2C_3H_6O_3 + 2RHPO_4 = C_6H_{10}O_4(RPO_4)_2$$
$$C_6H_{10}O_4(RPO_4)_2 + H_2O = C_2H_5OH + CO_2 + C_3H_5Д_2RPO_4;$$
$$C_3H_5O_2RPO_4 + H_2O = C_2H_5OH + CO_2 + RHPO_4,$$

по которой гексоза распадается на глицеринальдегид и диоксиацетон. Диоксиацетон конденсируется фосфорной кислотой в бифосфат гексозы, который в свою очередь распадается на диоксиацетон и глицеринальдегидфосфорную кислоту, сбраживаемую по схеме, данной мной еще в 1914 г. (3) на основании установленного мною факта, что глицериновая кислота сбраживается через пировиноградную с образованием уксусного альдегида и углекислоты.

1) $CH_2OH \cdot CHOH \cdot COH + H_2O = CH_2OH \cdot CHOH \cdot CH(OH)_2$
2) $CH_2OH \cdot CHOH \cdot CH(OH)_2 - H_2 = CH_2 \cdot OH \cdot CHOH \cdot COOH$
3) $CH_2OH \cdot CHOH \cdot COOH = H_2O = CH_3CO \cdot COOH$
4) $CH_3CO \cdot COOH = CH_3COH + CO_2$
5) $CH_3COH + H_2 = CH_3 \cdot CH_2OH$

В 1923 г. (4) мною было принято на основании опытов сбраживания в присутствии больших количеств сульфита или фосфорнокислых солей Na, что, при наличии в бродящем растворе глицеринового альдегида, диоксиацетона и их фос-

[1] 8 февраля 1934 г.

форнокислых эфиров, могут образоваться, кроме фосфорнокислых эфиров диоксиацетона и глицеринальдегида, четыре гексозофосфорных эфира.

1) $RCH_2 \cdot CHOH \cdot COH + CH_2OH\ CHOH\ COH = RCH_2\ (CHOH)_4 \cdot CH$
2) $RCH_2 \cdot CHOH \cdot COH + CH_2OH \cdot CO \cdot CH_2OH = RCH_2\ (CHOH)_3 \cdot CO \cdot CH_2OH$
3) $RCH_2 \cdot CO \cdot CH_2OH + COH \cdot CHOH \cdot CH_2R = RCH_2CO\ CHPH)_3 \cdot CH_2R$
4) $RCH_2 \cdot CO \cdot CH_2OH + COH \cdot CHOH \cdot CH_2OH = RCH_2CO \cdot (CHOH)_2 \cdot CH_2OH$

из которых природа третьего и четвертого была впервые установлена мною путем получения осазона (4), природа первого и второго — Робинзоном (5) и Нейбергом (6). Так как расщепление и синтез сахаров, происходящие энзиматическим путем, представляют собою обратимую реакцию, то в присутствии фосфатов, легко образующих с ними эфиры, она, в зависимости от условий среды, может итти в ту или другую сторону.

Дифосфат девулезы, являющийся хорошим донатором водорода, может дать при расщеплении две молекулы глицеринальдегида путем интрамолекулярного окисления:

$$RCH_2 \cdot CO \cdot CHOH \cdot CHOH \cdot CHOH \cdot CH_2R$$
$$+ H_2 - H_2$$

Получаем:

$$RCH_2 \cdot CHOH \cdot CO \cdot CHOH \cdot CHOH \cdot CH_2R \text{ или}$$
$$RCH_2 \cdot CHOH \cdot CHOH \cdot CO \cdot CHOH \cdot CH_2R$$

При расщеплении обе эти формы дают фосфорнокислый эфир глицеринальдегида, сбраживаемый дрожжами, как показали Фишер и Баэр (7), подтвердившие мои опыты сбраживаемости глицеринальдегида, выполненные совместно с Грязновым в 1912 г. (8).

В 1933 г. Нейберг и Кобель, продолжая мою работу о брожении глицериновой кислоты (9), подтвердили, что синтезированная ими фосфорглицериновая кислота легко переводится дрожжами и молочнокислыми бактериями в пировиноградную кислоту. Нильсоном (10) была найдена левовращающая форма фосфорноглицериновой кислоты, образующейся при ведении брожения в особых условиях.

Эмбден, Дойтике и Крафт изолировали $RCH_2 \cdot CHOH \cdot COOH$ при действии мускульного сока на дифосфат гексозы (11).

Таким образом, моя схема 1914 г. нашла полное подтверждение с разных сторон, хотя авторы умалчивают о моих основных исследованиях, давших толчок всем последним работам, равно как о моей руководящей схеме, многочисленные модификации которой множатся в большом числе; ср. Мейергоф (12), Эмбден (13), Клюивер (13), Эйлер (14), Нильсон (15) и пр. Нейберг (17),

хотя и упоминает вскользь о моей работе с глицериновой кислотой, но не приводит моей схемы распада и моего разъяснения его механизма.

Мейергоф и Кислинг (16) нашли, что из гексозофосфата образуется в мускульной ткани в присутствии сульфита пировиноградная кислота и глицеринофосфорная. Очевидно, что пировиноградная кислота образовалась из глицериновой. Между тем, еще в 1917 г. я дал на основании работы с Полонским уравнение десмутации (17) глицеринальдегида в нейтральной и особенно щелочной среде:

$$CH_2OH \cdot CHOH \cdot COH + H_2 \quad CH_2OH \cdot CHOH \cdot CH_2OH \text{ глицерин}$$
$$+ =$$
$$CH_2OH \cdot CHOH \cdot COH + O \quad CH_2OH \cdot CHOH \cdot COOH \cdot \text{ глицериновая кислота.}$$

При расщеплении фосфата левулезы на глицеринальдегид и диоксиацетон и десмутации их получаются те же продукты

$$CH_2OH \cdot CHOH \cdot COH\,O \quad CH_2OH \cdot CHOH \cdot COOH$$
$$+ =$$
$$CH_2OH \cdot CO \cdot CH_2OH\ H_2 \quad CH_2OH \cdot CHOH \cdot CH_2OH$$

глицерин и глицериновая кислота.

Мейергоф и Кислинг (16) дают в последней работе схему алкогольного брожения, которая является точным воспроизведением моей схемы с тем отличием, что, вместо глицеринового альдегида, глицериновой кислоты и глицерина, как значится сокращенно в моей схеме, они выписывают полностью их фосфорнокислые эфиры; при этом они не цитируют моей работы.

Что касается образования молочной кислоты, то уже в моей диссертации 1913 г. (18) указано на то, что молочная кислота образуется из пировиноградной кислоты, а не из метилглиоксала, путем восстановления ее таким же образом, как образуется спирт из уксусного альдегида, как это было мною показано еще в 1912 г. (19); это же было подтверждено и в работе 1914 г. (20), а именно:

$$CH_2OH \cdot CHOH \cdot CH(OH)_2 - H_2 = CH_2OH \cdot CHOH \cdot CO_2H$$
$$CH_2OH \cdot CHOH \cdot CO_2H = CH_3 \cdot CO \cdot CH_2H + H_2O$$
$$CH_3 \cdot CO \cdot CO_2H + H_2 = CH_3 \cdot CHOH \cdot CO_2H.$$

Ныне Мейергоф и Кисслинг изображают эту реакцию по моей схеме 1917 г. (21) как дисмутацию фосфата глицеринальдегида в глицеринофосфорную и фосфоглицериновую кислоту. Фосфоглицериновая кислота дает пировиноградную, последняя же дает с глицеринофосфорной молочную кислоту и фосфат глицеринальдегида. Так как, по моим ориентировочным опытам, глицеринальдегид дает с пировиноградной кислотой при помощи дегидразы, полученной из дрожжей

по моему способу (22), молочную кислоту, так же как спирт в присутствии уксусного альдегида (23), то указанная мною выше реакция представляется мне более правильной, особенно при pH меньшей семи.

Таким образом, все последние работы о механизме энзиматического образования из сахара спирта, углекислоты и молочной кислоты являются частью повторением, частью дальнейшим развитием моих работ с 1907 по 1927 гг.

Относительно роли коэнзима установлены три основных факта: 1) без коэнзима нет брожения (Гарден), 2) количество сброженного продукта пропорционально в конечном счете колпчеству коэнзима (Лебедев, 24), 3) для сопряженных окислительно-восстановительных реакций коэнзим не нужен (Лебедев, 25). Таким образом, деятельность его следует отнести к первым стадиям распада сахара, включая сюда образование фосфорнокислых эфиров вторичного происхождения. Следует думать, что в состав энзимов зимаза входит также энолаза, в пользу чего говорит впервые мною установленный факт (25), что глюкоза и левулеза дают один и тот же дифосфат гексозы. Фосфаты играют тоже весьма важную роль при брожении гексоз. Они облегчают распад гексозы на две триозы, поскольку эта реакция обратимая, совершаемая альдолазой или дезальдолазой, как это было мною принято (27) при построении схемы еще в 1911 г. Введение в молекулу фосфорной кислоты не только облегчает действие альдолазы, но и, до известной степени, ориентирует место ее воздействия. К аналогичному взгляду приходит также Оле (28), показавший, что производные сахаров легче могут расщепляться вследствие нарушения молекулярного равновесия, чем сами сахара. Само собой разумеется, что мыслимо образование эфиров самого разнообразного состава при наличии в дрожжах энергично действующей фосфатезы, причем эти эфиры могут и не представлять собою неизбежную переходную стадию в цепи реакций, ведущих к образованию конечных продуктов, нося, до известной степени, случайный и временный характер в зависимости от целого ряда условий, из которых главнейшие — активность энзимов комплекса зимазы, их соотношение между собой, количество и род сахара, количество и род фосфатов, количество и состав «коэнзима», температура и пр.

Метилглиоксаловая теория, к которой я всегда относился отрицательно (29), так как метилглиоксал не сбраживается ни дрожжами, ни соком, ни препаратами их, оставлена ныне самим Нейбергом (6), ревностно отстаивавшем ее в течение многих лет и этим надолго затормозившим принятие моей схемы, ныне входящей в обиход всех выдающихся исследователей дрожжевого и мускульного распада сахара. Уже то обстоятельство, что метилглиоксал появляется лишь при недостатке коэнзима (30), говорило против, а не за теорию Нейберга, взявшего ее у Воля (31).

Как показал Ломан (32), для образования из сахара молочной кислоты нужен коэнзим, для образования ее из метилглиоксала нужен глютатион.

Продолжая в 1933 г. исследования по химизму распада сахара, удалось в одном и том же опыте брожения с дрожжами установить образование всех соединений, требуемых моей схемой, начиная с триозы и кончая углекислотой и спиртом. Подробное сообщение об экспериментальной части этой работы, проводимой аспирантом З. М. Букановской, будет сделано мной в ближайшее время, сейчас же я дам сводную таблицу одного из опытов, начатых еще в апреле прошлого года, в которых определялись триоза (соответственно триозофосфорная кислота) через метилглиоксал по методам Пинкуса и Нейберга (33) и Барренштеена и Брауна (34), глицерин по методу Нейманна (35), уксусный альдегид по методу Нейберга и Готшалька (36), спирт по методу Дюкло (37), пировиноградная кислота по методу Кеза (38).

Зарядка. В колбу вносились ингредиенты в три приема: 1) 100 г сахара тростникового + 500 см³ воды + питательные соли (2 г $(NH_4)_2SO_4$, 1 г Na_2HPO_4 + по одному маленькому кристаллу $MgCl_2$, KCl и $CaCl_2$; 2) 25 г дрожжей верхнего брожения 1-й генерации; 3) 50 г Na_2SO_3 + 500 см³ воды.

Сульфит и акцепторы (митиленовая синька и сера в порошке) задавались после того, как наступало заметное брожение. Опыты ставились с параллельными.

К — контрольный опыт. Заданы сахар, питательные соли и дрожжи. Су — добавлено еще 50 г Na_2SO_4. М-С — то же + 1 г метиленовой синьки, по мере же исчезновения окраски добавлено было в общем еще 0.3 г. Всего 1.3 г. S — то же + 25 г серы в порошке.

Общий объем жидкости $1^1/_2$ л в колбе, заряжено 8 колб.

Брожение велось в термостате при 33—34° в течение 8 суток. Конец брожения контролировался на присутствие сахара реактивом Оста с нагреванием на кипящей водяной бане. В начале и конце брожения определялось pH колориметром Вульфа, кроме того, в конце брожения определялось количество мертвых клеток с метиленовой синькой и метилвиолетом. Велся также микроскопический контроль на степень загрязнения посторонней микрофлорой, развитие которой было замечено лишь в контрольной пробе в конце брожения. Очевидно, добавка сульфита способствовала чистоте брожения. В конце брожения были поставлены также контрольные опыты на метилглиоксал путем фракционной отгонки, однако, он не был обнаружен.

Отделение спирта от уксусного альдегида производилось по методу Нейберга с m-фанилен-диамином.

Отношение уксусного альдегида к глицерину — от 2 до 2.5, вероятно, вследствие частичной трансмутации последнего в спирт и уксусную кислоту, которая в этих опытах не определялась.

В присутствии акцепторов видно увеличение количества пировиноградной кислоты и уксусного альдегида и уменьшение количества триозы, очевидно, вследствие усиленного перехода ее в глицериновую кислоту и сбраживания

последней. Вскоре мною будет сообщено о брожении глицериновой кислоты с образованием пировиноградной, определенной по методу Кеза. В настоящее время ведутся также опыты по определению глицериновой кислоты (соответственно фосфоглицериновой) в бродящей жидкости, о которых будет сообщено по окончании их.

Сводная таблица на 100 г сахарозы (105.26 гексозы)

Обозначения	pH		Триоза мг	Глицерин %	Уксусный альдегид %	Пировиноградная кислота, мг	Спирт %
	Начало брожения	Конец брожения					
К	6.8	5.0	Следы	2.90	0.25	17.7	51.0
Су	8.6	6.4	427	23.20	5.55	65.0	33.6
М-С	8.6	5.4	260	26.24	6.30	82.1	32.0
S	8.0	6.5	60	29.82	5.89	93.0	29.1

Опыты по определению триозы (соответственно триозофосфорной кислоты), образующейся из гексозы, были поставлены мною еще в 1924 г. в присутствии сульфита[1], однако, они не были так доказательны, как эти, так как в то время не существовало столь надежных и точных методов, позволяющих определять триозу и пировиноградную кислоту, образующихся в качестве промежуточных продуктов лишь в весьма небольших количествах, как методы Барреншеена и Кеза.

Описанные здесь опыты будут повторены также с чистой культурой дрожжей в стерильных условиях, но и теперь ясно, что брожение сахара идет по моей схеме, а не по схеме Нейберга.

Исследование в указанных здесь направлениях будет мною продолжено причем будет обращено особое внимание на выяснение химической природы триозы соотв. ее монофосфата. Не исключена возможность образования смеси триоз с преобладанием одной из них.

Я считаю нужным отметить здесь примерную работу аспирантки З. М. Букановской, тщательно и с большой настойчивостью, не считаясь с временем, проводившей опыты.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. C. **153**, 136 (1911); Ann. Inst. Pasteur (1911) 847; Ber. **45**, 3270 (1912). 2. Biochem. Z., **10**, 455 (1908); **28**, 213 (1910). 3. Ber., **47**, 660 (1914). 4. H.-S. Z. Physiol. Ch., **132**, 275 (1924). 5. Biochem. Z., **16**, 809 (1922). 6. Biochem. Z., **88**, 432 (1918). 7. Ber. chem. Ges., **65**, 337 (1932). 8. Ber. chem. Ges. **45**, 3256 (1912). 9. Biochem. Z., **260**, 241, **263**, 218 (1933). 10. Ark. f. Chemi och Geologi. **10**, A. 112 (1930). 11. Klin. Wochenschrift. № 12, S. 213 (1933). 12. Biochem. Z., **264**, 40 (1933).

[1] Средние цифры, по меньшей мере, из двух определений. Расхождения незначительны.

13. Koninke Akad. von Wettenschappen. Proc. **29**, № 3 (1926). 14. Ann. Acad. Scient. Fennicae. A, 29 (1926), № 3, Compa Festschrift. Amsterdam. 15. Biochem. Z., **258**, 198 (1933). 16. Biochem. Z., **264**, 40 (1933). 17. ЖРФХО, **49**, 344 (1917). H.-S. Z. physiol. Chem., **132**, 275 (1924). 18. Химические исследования над внеклеточным спиртовым брожением. Новочеркасск, 1913. Приложение к «Известиям Донского политехнического института», стр. 185. 19. Ber. Chem. Ges., **245**, 3268, 3270 (1912). 20. Ber. Chem. Ges., **47**, 660 (1914). 21. ЖРФХО, **49**, 344 (1917). 22. H.-S. Z. physiol. Chem., **156**, 153 (1926). 23. H.-S. Z. physiol. Chem., **160**, 97 (1926); **172**, 50 (1927). 24. Ann. de l'Inst. Pasteur. **25**, 682 (1911). 25. H.-S. Z. physiol. Chem., **172**, 255 (1927). 26. Biochem. Z., **20**, 114 (1909). **28**, 213 (1910). 27. C. R. (1911). — Bull. de la Soc. chim. de France, IX—X (4). **76**, 411, 672, 744 (1911). 28. Ber. chem. Ges., **62**, 1651 2758 (1929); **63**, 2912 (1930); **64**, 1759, 2804, 2810 (1931). 29. H.-S. Z, physiol. chem., **132**, 290 (1924). Это же мною было подчеркнуто в докладе о механизме спиртового брожения на последнем Менделеевском съезде в Харькове. 30. Neuberg u. Kobel. Biochem. Z., **203**, 463 (1928). Pi-Suñer-Bayo. **213**, 489 (1929). 31. Lipmann. Chemie der Zuckerarten. S. 1891 (1904). Biochem. Z., **5**, 54 (1907). 32. Naturwiss., **21**, 223 (1933). 33. Ber., **31**, 31 (1898)., Neuberg, Faerber, Levite, Adam u. Erwin Schwenk. Biochem. Z., **83**, 244 (1917). 34. Biochem. Z., **233**, 305. 35. Z. f. ang. Chem., 234 (1917). 36. Biochem. Z., **146**, 164 u. 582. 37. Traité de Microbiol., p. 8. (1900). 38. Biochem. Journ., p. 753 (1932).

A. LEBEDEV. DÉCOMPOSITION DIASTATIQUE DU SUCRE JUSQU'AUX ALCOOL, ACIDES CARBONIQUE ET LACTIQUE AVEC FORMATION INTERMÉDIAIRE DU TRIOSE RESP. DE L'ETHER TRIOSE-MONOPHOSPHORIQUE

RÉSUMÉ

L'auteur fait un bref aperçu de ses recherches depuis 1908, qui ont été, sans être citées d'ailleurs, en partie répétées, en partie continuées par Meyerhof, Embden Kluyver, Euler, Nilson etc. et il décrit, en continuant le travail de l'année 1924, des nouvelles expériences dans lesquelles il démontre la formation au cours de la fermentation du sucre par la levure, de distillerie du triose, des acides pyruvique et carbonique de la glycérine, de l'alcool et de l'aldéhyde acétique d'après ses schémas des années 1911, 1912, 1914 et 1917.

ИСПРАВЛЕНИЯ

В. С. Федоров, автор статьи «О криволинейных интегралах», помещенной в ИМЕН, 34, № 6 (стр. 887—896) просит сделать следующие исправления в тексте статьи:

Стр. 889, 11 строка снизу: вместо $\varkappa\sigma$ следует $d\sigma$.

„ „ 4 „ „ после слов «есть максимум» и формулы в прямых скобках добавить: «для всех Δx в формуле (A)». Аналогичные добавления следует сделать при определении $M(\Delta y)$ на стр. 891 и 894.

„ „ 1 „ сверху: вместо первого C_n после слова «где» следует C'.

„ „ „ „ снизу: вместо $J(U, C)$ надо $J(V, C)$.

Оглавление — Sommaire

	стр.
Д. С. Рождественский. Интерферометры для исследования аномальной дисперсии (с 8 фиг. и резюме на немецк. яз.)	1119
В. В. Шулейкин. Внешняя и внутренняя динамика рыбы (с 13 фиг. и резюме на англ. яз.)	1151
Ш. Е. Микеладзе. О новых алгоритмах численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (с резюме на франц. яз.)	1187
Н. А. Артемьев. Теория вертикального упругого маятника (с 1 фиг. и резюме на франц. яз.)	1225
—— Оценка величины периода колебаний на основании метода интегральных уравнений (с резюме на немецк. яз.)	1231
И. И. Путилин. Орбита малой планеты 1036 Ganymed (с 1 фиг. и резюме на англ. яз.)	1237
Л. В. Писаржевский и Т. С. Гликман. Влияние растворителя на гетерогенный катализ. Катализ перекиси водорода в различных растворителях. I (с 8 фиг. и резюме на немецк. яз.)	1281
А. Н. Лебедев. Энзиматический распад сахара до углекислоты, спирта и молочной кислоты с промежуточным образованием триозы (соотв. триозофосфорной кислоты) (с резюме на франц. яз.)	1291

	PAG.
***D. Roždestvenskij** (D. Roschdestvensky). Interferometer für Untersuchungen über anomale Dispersion (mit 8 Fig. und einer deutschen Zusammenfassung)	1119
***V. Šulejkin** (Was. Shoulejkin). La dynamique extérieure et intérieure du poisson (avec 13 fig. et résumé en anglais)	1151
***Ch. Mikeladze.** Sur de nouveaux algorithmes d'intégration numérique d'équations différentielles ordinaires (avec résumé en français)	1187
***N. Artemjev.** La théorie du pendule élastique vertical (avec 1 fig. et résumé en français)	1225
*—— Abschätzung der Periode von nichtlinearen Schwingungen mit Hilfe der Methode der Intégralgleichungen (mit einer deutschen Zusammenfassung)	1231
***I. Putilin.** L'orbite de l'astéroïde 1036 Ganymed (avec 1 fig. et résumé en anglais)	1237
***L. Pissarjewsky und T. Glückmann.** Der Einfluss des Lösungsmittels auf die heterogene Katalyse. Katalyse von Wasserstoffsuperoxyd in verschiedenen Lösungsmitteln. I (mit 8 Fig. und einer deutschen Zusammenfassung)	1281
***A. Lebedev.** Décomposition diastatique du sucre jusqu'aux alcool, acides carbonique et lactique avec formation intermédiaire du triose resp. de l'éther triose-monophosphorique (avec résumé en français)	1291

Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала
Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original

Цена 3 руб. 50 коп.